

Stabilisation robuste et ultrarapide au moyen d'une double
boucle de rétroaction et application à un système
de lévitation magnétique

par

Lyes BENKHELLAT

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
COMME EXIGENCE PARTIELLE À L'OBTENTION DE LA MAITRISE
AVEC MÉMOIRE EN GÉNIE, CONCENTRATION ÉNERGIES
RENOUVELABLES ET EFFICACITÉ ÉNERGÉTIQUE
M. Sc. A.

MONTREAL, LE 11 JANVIER 2017

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

©Tous droits réservés

Cette licence signifie qu'il est interdit de reproduire, d'enregistrer ou de diffuser en tout ou en partie, le présent document. Le lecteur qui désire imprimer ou conserver sur un autre media une partie importante de ce document, doit obligatoirement en demander l'autorisation à l'auteur.

PRÉSENTATION DU JURY
CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. David Bensoussan, directeur de mémoire
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

Mme Lyne Woodward, présidente du jury
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

M. Maher Hammami, examinateur externe
Université de Sfax, Tunisie

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 13 DÉCEMBRE 2016

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont d'abord à mon directeur de thèse, David Bensoussan, professeur à l'ÉTS pour son soutien constant et ses précieux conseils qui m'ont permis de progresser tout au long de mon mémoire et de garder une direction ferme.

Je tiens à remercier également Michel Beaudin pour m'avoir encouragé au moment de doute.

Enfin je dédie ce mémoire à mes parents, mes frères et sœur qui ont soutenu et rendu possible ma recherche.

STABILISATION ROBUSTE ET ULTRARAPIDE AU MOYEN D'UNE DOUBLE BOUCLE DE RÉTROACTION ET APPLICATION À UN SYSTÈME DE LÉVITATION MAGNÉTIQUE

Lyes BENKHELLAT

RÉSUMÉ

Traditionnellement les méthodes de commande étaient intéressées par le maintien de la stabilité et de marges de robustesse sécuritaires. L'amélioration des performances temporelles n'a pas été prioritaire. Il est proposé dans cette thèse d'améliorer une nouvelle méthode de commande robuste et ultra rapide récemment développée à l'École de Technologie Supérieure. Cette méthode est basée sur le principe de la commande quasi linéaire, c'est-à-dire une commande dans laquelle les gains sont reliés à la bande passante, ce qui assure la souplesse désirée de la commande en rapport au maintien des marges de stabilité.

L'amélioration consiste à réaliser une commande à double boucle. La boucle interne sera une commande à retour d'état, ou une commande LQG, qui assure la stabilité du système. La boucle extérieure vise à améliorer la performance du système stabilisé. L'amélioration principale est la réduction de l'amplitude du signal d'entrée au processus ce qui permet d'éviter des saturations tout en garantissant la rapidité et la robustesse du système.

Ainsi la stabilisation et la réduction de sensibilité en dessous de valeurs seuils minimales peuvent être réalisées de façon indépendante. Par ailleurs la sensibilité minimale sur la bande passante désirée est obtenue au moyen d'une compensation à haut gain sans que cela influence la sensibilité globale sur l'ensemble des fréquences. Cette technique assure des temps de réponse très courts et compétitifs. Elle peut également être améliorée au moyen de circuits de phase opérant dans les fréquences intermédiaires.

La comparaison des résultats obtenus avec ceux obtenus par d'autres méthodes montre non seulement la supériorité de la commande à double boucle mais également l'avantage important consistant à limiter le signal d'entrée au processus évitant ainsi des risques de saturation tout en assurant une économie d'énergie. Par ailleurs, une méthode de simulation graphique extrêmement facile à utiliser rend la méthode accessible et facile d'utilisation pour le concepteur de systèmes de commande performants.

Mots-clés : commande quasi-linéaire, double boucle, retour de sortie, sensibilité

ROBUST AND ULTRAFAST STABILIZATION BY MEANS OF A DOUBLE LOOP FEEDBACK AND APPLICATION TO A MAGNETIC LEVITATION SYSTEM

Lyes BENKHELLAT

ABSTRACT

Control designers have usually been interested in ensuring stability and robust margins of security of feedback systems. The improvement of time domain performances was put in background. It is proposed in this work to improve a novel control design recently developed at the École de Technologie Supérieure that is robust and ultra-fast. This design is based on a quasi-linear control, i.e. a controller in which the high-frequency cut-off depends on the open loop gain, which ensures smooth control while maintaining the robust stability margins.

The design method consists in a double loop control. The inner loop uses a state feedback, or LQG, to stabilize the system. The outer loop improves the performances of the stabilized system. The main improvement is the limitation of the input signal to the process so as to avoid saturation in the process or damaging actuators. The design also achieves a fast time response with robust stability.

The double loop design allows the separation of stabilization and minimization of sensitivity: The stabilization of the process is done arbitrarily from the improvement of performances. Furthermore, the minimization of the sensitivity of the closed loop system on a bandwidth of interest is achieved while keeping the overall sensitivity under a bounded value. The resulting time response offers very short settling times and with little to no overshoot. This time response can be further improved using lead-lag circuits within the intermediate frequency range without affecting the robustness previously achieved.

Results of this novel method are shown to be superior when compared to other control methods. In addition to a better time response, the method allows the limitation of the input signal which is a critical point in control designs. A graphical tool that is both intuitive and powerful, allows the designer to fine-tune the control to achieve trade-offs on the different design criteria.

Keywords: quasi-linear control, multiple loop, feedback, ultra-fast

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 DES NORMES, DE LA PERFORMANCE ET DE LA ROBUSTESSE ...	5
1.1 De l'importance de la mesure de performance des systèmes	5
1.2 Les normes	11
CHAPITRE 2 METHODE B, THEORIE ET APPLICATION	21
2.1 Motivation.....	21
2.2 Méthode B appliquée au systèmes stables :	25
2.3 Méthode B appliquée aux systèmes instables :	28
CHAPITRE 3 SYSTÈME DE LÉVITATION MAGNÉTIQUE : PRÉSENTATION ET MODÉLISATION	31
3.1 Lévitación magnétique	31
3.2 Fondements théoriques	32
3.3 Modélisation du système de suspension magnétique.....	34
CHAPITRE 4 COMPENSATION DU SYSTÈME DE LÉVITAION METHODE B ET AUTRES METHODES	41
4.1 Compensations du système	41
4.2 Méthode B.....	41
4.3 Retour d'état.....	56
4.4 Comparaison des différentes méthodes de compensation	70
CHAPITRE 5 COMPENSATION PAR DOUBLE BOUCLE	71
5.1 Commande à boucles multiples	71
5.2 Problème de stabilisation et amélioration des performances :	72
5.3 Stabilité entrée-sortie et stabilité interne du schéma à double boucle :	76
5.4 Synthèse des compensateurs :	78
5.5 Compensateur B avec u_{max} et ω_2 non limités :	80
5.6 Compensateur B avec u_{max} limité :	98
5.7 Optimisation du compensateur B avec u_{max} limité :	113
5.8 Ajout d'un préfiltre pour améliorer la réponse temporelle	116
5.9 Récapitulation des résultats de simulation.....	118
CHAPITRE 6 COMPARAISON DES PERFORMANCES AVEC LES AUTRES METHODES DE COMPENSATION	121
6.1 Méthodes de compensation et critères de comparaison.....	121
6.2 Cas 1 : Signal de commande très petit.....	122
6.3 Cas 2 : Temps de stabilisation très petit.....	129

CONCLUSION.....	137
ANNEXE I IMPLÉMENTATION VISUELLE SUR GÉOGEBRA	139
ANNEXE II PROGRAMME MATLAB DE SYNTHÈSE DE LA DOUBLE BOUCLE.....	147
ANNEXE III PROGRAMME MATLAB POUR LES FONCTIONS DE PONDERATION	155
LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	159

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 3-1	Valeurs caractéristiques du système modélisé37
Tableau 4-1	Temps de stabilisations pour différentes valeurs de R et Q69
Tableau 4-2	Norme du signal de commande pour différents R et Q.....69
Tableau 4-3	Comparaison entre les différentes méthodes de compensation.....70
Tableau 5-1	Récapitulatif des résultats de simulation de la compensation à double boucle119
Tableau 6-1	Comparaison des trois méthodes, Cas 1129
Tableau 6-2	Comparaison des trois méthodes, Cas 2.....135

LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1-1	Schéma synoptique d'un système à rétroaction avec retour unitaire.....6
Figure 2-1	Schéma synoptique d'un système à rétroaction à retour unitaire21
Figure 2-2	Transmittance et sensibilité d'un système en boucle fermée.....23
Figure 2-3	Diagramme de Nyquist de la boucle ouverte et cercles de sensibilité25
Figure 2-4	Propriété d'atténuation d'un système26
Figure 3-1	Suspension d'un objet métallique avec contrôle dynamique tirée de (Sangster, 2012, p. 77)34
Figure 3-2	Lieu de Nyquist du système pour un compensateur identité.....38
Figure 3-3	Lieu des pôles en boucle fermée du système39
Figure 4-1	Propriété d'atténuation du système de lévitation.....43
Figure 4-2	Comportement en hautes fréquences de P (bleu) et H (rouge)44
Figure 4-3	Diagramme de Nyquist du système compensé en boucle fermée47
Figure 4-4	Réponse indicielle du système compensé en boucle fermée.....48
Figure 4-5	Diagramme de Bode du compensateur B.....48
Figure 4-6	Boucle ouverte compensée incluant J250
Figure 4-7	Réponse temporelle de la boucle fermée avec J2 (bleu) et sans J2 (rouge)51
Figure 4-8	Dépassement fréquentiel de la transmittance (boucle fermée)52
Figure 4-9	Diagramme de Bode du filtre F.....53
Figure 4-10	Effet du préfiltre sur la réponse temporelle en boucle fermée54
Figure 4-11	Effet du double préfiltre sur la réponse fréquentielle du système.....55
Figure 4-12	Effet du double préfiltre sur la réponse temporelle en boucle fermée55

Figure 4-13	Représentation d'état d'un système LTI	56
Figure 4-14	Schéma de retour d'état appliqué au système (suivi de référence).....	57
Figure 4-15	Réponse temporelle du système à retour d'état pour différents p_s	63
Figure 4-16	Signal de commande U pour différents p_s	64
Figure 4-17	Réponse temporelle avec différentes valeurs de Q	67
Figure 4-18	Signal de contrôle U pour différentes valeurs de Q	67
Figure 4-19	Réponse temporelle pour différentes valeur de R	68
Figure 4-20	Réponses temporelles pour différentes valeurs de R et Q	69
Figure 5-1	Retour de sortie avec compensateur C	73
Figure 5-2	Schéma équivalent du modèle de référence	74
Figure 5-3	Système stabilisé par C_0 dans le schéma de modèle de référence	75
Figure 5-4	Schéma de commande à double boucle proposé.....	76
Figure 5-5	Équivalence des boucles de retour	77
Figure 5-6	Compensateur B avec u_{\max} non limité.....	84
Figure 5-7	Bode de la sensibilité S pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$	85
Figure 5-8	Bode de la boucle ouverte $L=PC_B$ pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$	86
Figure 5-9	Réponse indicielle en boucle fermée pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$	87
Figure 5-10	Bode du compensateur C_B pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$	87
Figure 5-11	Bode de la sensibilité S pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=10$ et $PM=50^\circ$	88
Figure 5-12	Bode de la boucle ouverte $L=PC_B$ pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=10$ et $PM=50^\circ$	89
Figure 5-13	Réponse indicielle en boucle fermée pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=10$ et $PM=50^\circ$	90
Figure 5-14	Bode du compensateur C_B pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=10$ et $PM=50^\circ$	90

Figure 5-15	Bode de la sensibilité S pour $\varepsilon=0.4$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$	91
Figure 5-16	Réponse indicielle en boucle fermée pour $\varepsilon=0.4$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$	92
Figure 5-17	Bode de la boucle ouverte $L=PC_B$ pour $\varepsilon=0.4$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$	92
Figure 5-18	Bode de la sensibilité S pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.4$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$	93
Figure 5-19	Réponse indicielle en boucle fermée pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.4$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$	94
Figure 5-20	Bode de la boucle ouverte $L=PC_B$ pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.4$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$	94
Figure 5-21	Bode de la sensibilité S pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=70^\circ$	95
Figure 5-22	Réponse indicielle en boucle fermée pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=70^\circ$	96
Figure 5-23	Bode de la boucle ouverte $L=PC_B$ pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.4$, $\omega_s=20$ et $PM=70^\circ$	96
Figure 5-24	Bode du compensateur C_B pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=70^\circ$	97
Figure 5-25	Schéma équivalent au retour d'état avec observateur	99
Figure 5-26	Schéma de la double boucle avec le schéma équivalent du premier étage	99
Figure 5-27	Bode de la sensibilité S pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=1.01$	104
Figure 5-28	Réponse indicielle en boucle fermée pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=1.01$	104
Figure 5-29	Diagramme de Bode du signal u pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=1.01$	105
Figure 5-30	Courbe temporelle du signal de commande pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=1.01$	106
Figure 5-31	Bode du compensateur C_B pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=1.01$	106
Figure 5-32	Bode de la sensibilité S pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=10$	107
Figure 5-33	Réponse indicielle en boucle fermée pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=10$	108
Figure 5-34	Diagramme de Bode du signal u pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=10$	108

XVIII

Figure 5-35	Courbe temporelle du signal de commande pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=10$	109
Figure 5-36	Bode du compensateur C_B pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=10$	109
Figure 5-37	Bode de la sensibilité S pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=1000$	110
Figure 5-38	Réponse indicielle en boucle fermée pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=1000$	111
Figure 5-39	Bode du compensateur C_B pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=1000$	112
Figure 5-40	Énergie de commande totale pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=10$	115
Figure 5-41	Énergie de commande totale pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=1000$	116
Figure 5-42	Effet de l'application du préfiltre sur le système compensé	118
Figure 6-1	Courbe temporelle du signal de commande pour LQG, Cas 1	122
Figure 6-2	Bode de la sensibilité S pour LQG, Cas 1	123
Figure 6-3	Réponse indicielle du système compensé en boucle fermée pour LQG, Cas 1	124
Figure 6-4	Courbe temporelle du signal de commande pour H_∞ , Cas 1	125
Figure 6-5	Bode de la sensibilité S pour H_∞ , Cas 1	125
Figure 6-6	Réponse indicielle du système compensé en boucle fermée pour H_∞ , Cas 1	126
Figure 6-7	Courbe temporelle du signal de commande pour double boucle, Cas 1	127
Figure 6-8	Bode de la sensibilité S pour double boucle, Cas 1	128
Figure 6-9	Réponse indicielle du système compensé en boucle fermée pour double boucle, Cas 1	128
Figure 6-10	Courbe temporelle du signal de commande pour LQG, Cas 2	130
Figure 6-11	Bode de la sensibilité S pour LQG, Cas 2.....	130
Figure 6-12	Réponse indicielle du système compensé	131
Figure 6-13	Courbe temporelle du signal de commande pour H_∞ , Cas 2	132

Figure 6-14	Bode de la sensibilité S pour H_∞ , Cas 2	132
Figure 6-15	Réponse indicielle du système compensé en boucle fermée pour H_∞ , Cas 2.....	133
Figure 6-16	Courbe temporelle du signal de commande pour double boucle, Cas 2.....	134
Figure 6-17	Bode de la sensibilité S pour double boucle, Cas 2	134
Figure 6-18	Réponse indicielle du système compensé	135

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

LTI :	Système linéaire à temps invariable
LQR :	Linear Quadratic Regulator – Régulateur linéaire quadratique
Méthode B :	Méthode de compensation de Bensoussan
MagLev :	Magnetic Levitation – sustentation magnétique
MLI :	Modulation de Largeur d’Impulsion
PID :	Compensateur Proportionnel-Intégrateur-Dérivateur
MPPT:	Maximum Power Point Tracking. Méthode de recherche du point de puissance maximale
VSI :	Voltage Source Inverter – Redresseur de tension
VSC :	Voltage Source Controller – Onduleur de tension

LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

$\ \quad \ :$	Norme
$\ \quad \ _2:$	Norme 2
$\ \quad \ _\infty:$	Norme infini
$\ \quad \ _F:$	Norme matricielle de Frobenius
$\ \quad \ _{H_2}:$	Norme d'opérateur H_2
$\ \quad \ _{H_\infty}:$	Norme d'opérateur H_∞
$\zeta:$	Facteur d'amortissement d'un système du deuxième ordre
$\varepsilon:$	Sensibilité admise sur la plage de minimisation de la sensibilité pour le système compensé par la méthode B.
$\mu:$	Facteur de la propriété d'atténuation d'un système stable
$\mu_0:$	Perméabilité magnétique de l'air
$\lambda(s):$	Equation caractéristique du système $A - BK$
$\lambda(G(\omega)):$	Valeurs propres du système G en fonction de la fréquence
$\sigma(G(\omega)):$	Valeurs singulière du système G en fonction de la fréquence
$\omega_0:$	Fréquence à partir de laquelle la propriété d'atténuation d'un système est vérifiée
$\omega_1:$	Fréquence du filtre basse fréquences du compensateur B
$\omega_2:$	Fréquence du filtre à hautes fréquences du compensateur B
$\omega_a:$	Fréquence pour laquelle tous les pôles instables sont compris dans la région $ s \leq \omega_a$
$\omega_b:$	Fréquence qui garantit le respect de la valeur maximale de sensibilité du système compensé par la méthode B
$\omega_{BF}:$	Fréquence de la bande passante en boucle fermée d'un système

ω_c :	Fréquence de coupure d'un système
ω_d :	Fréquence amortie d'un système de deuxième ordre
ω_n :	Fréquence naturelle d'un système de deuxième ordre
ω_p :	Fréquence de coupure désirée du système compensé en boucle fermée, telle que $\omega_p \geq \omega_x$
ω_s :	Fréquence qui délimite la plage de fréquences de minimisation de la sensibilité dans la méthode B
ω_x :	Fréquence définie par $\omega_x \geq \max(\omega_1, \omega_0, \omega_a)$
A, B, C, D :	Matrices constantes de la représentation dans l'espace d'état du système P
c :	Facteur de la propriété d'atténuation d'un système instable
c' :	Facteur de gain assurant que la fonction $H(s)$ adopte le même comportement que $P(s)$ en hautes fréquences
C :	Compensateur
$C(s)$:	Fonction de transfert du compensateur C
$C_B(s)$:	Fonction de transfert du compensateur B (synthétisé par la méthode B)
d_1 :	Perturbation sur le signal de commande
d_2 :	Perturbation sur la sortie
d_3 :	Bruit sur la mesure
e :	Signal erreur du système à rétroaction
f_k :	Force de frottement de l'aire d'un corps en suspension
$F(s)$:	Préfiltre appliqué à la boucle fermée du système compensé
$H(s)$:	Fonction de transfert dont le comportement en haute fréquence s'apparente à celui de la fonction de transfert du système instable
J :	Boucle ouverte désirée dans la compensation par la méthode B
J_1 :	Filtre à haut gain, composante de J agissant en basses fréquences

J_2 :	Réseau de circuits de phase, composante de J agissant sur les fréquences intermédiaires
J_3 :	Filtre passe-bas à large bande de fréquences, composante de J agissant en hautes fréquences
k :	Ordre du filtre à hautes fréquences du compensateur B
k_1 :	Paramètre du gain du compensateur B
k_f :	Facteur de frottement de l'aire d'un corps en suspension
K :	Gain de retour d'état
K_r :	Gain de signal de référence
K_e :	Gain de l'observateur d'état
L_0 :	Inductance propre d'un électroaimant
L :	Inductance d'un électroaimant
L(s) :	Gain en boucle ouverte du système compensé
L^1 :	Espace des signaux dont la norme 1 est bornée
L^2 :	Espace des signaux dont la norme 2 est bornée
L^∞ :	Espace des signaux dont la norme ∞ est bornée
M :	Sensibilité maximale tolérée pour le système compensé par la méthode B
n :	Ordre de la propriété d'atténuation d'un système stable
N_p :	Nombre de pôles instables d'un système
p_s :	Pôle stabilisé du système P(s)
P :	Processus à commander
P(s) :	Fonction de transfert du processus P
$P_1(s)$:	Partie stable à minimum de phase de P(s)
$P_2(s)$:	Partie instable de P(s)

$P_s(s)$:	Système stable obtenu par retour d'état appliqué au système $P(s)$
q :	Ordre de la propriété d'atténuation d'un système instable
q' :	Ordre du pôle s_0 de $H(s)$ assurant le critère d'encerclement de Nyquist
Q :	Matrice de pondération de l'état x dans le régulateur LQR
r :	Signal de référence
R :	Matrice de pondération de l'entrée u dans le régulateur LQR
R :	Résistance du circuit d'un électroaimant
S :	Sensibilité du système compensé en boucle fermée
t_s :	Temps de stabilisation du système compensé en boucle fermée
T :	Transmittance du système compensé en boucle fermée
u :	Signal de commande
x :	Etat du système P dans l'espace d'état
\hat{x} :	Etat estimé par l'observateur d'état
y :	Signal de sortie
\hat{y} :	Sortie estimée par l'observateur d'état

INTRODUCTION

La commande des systèmes dynamiques joue un rôle important dans le bon fonctionnement des machines et des procédés industriels. La complexité de ces systèmes et les exigences de performance toujours plus strictes se traduisent par le besoin de méthodes de commande garantissant des performances élevées avec une robustesse contre les aléas et imprévus de l'environnement. Les critères de stabilité, de robustesse et de performance sont les objectifs à concilier pour toute méthode de commande efficace.

Traditionnellement, les méthodes de synthèse de compensateurs ont privilégié la stabilité et la robustesse du système commandé alors que les performances temporelles ont été reléguées au second plan. L'une des formulations les plus utilisées pour la synthèse de la commande robuste est le problème de sensibilité mixte dans laquelle l'objectif est de minimiser la norme de la sensibilité ainsi que celle du signal d'entrée du processus commandé et ce, pour des plages de fréquences d'intérêt.

La méthode de commande développée par David Bensoussan, ou plus simplement méthode B, permet de synthétiser un compensateur qui assure la stabilité de la boucle fermée tout en minimisant la sensibilité du système. La sensibilité du système en boucle fermée est ainsi maintenue en dessous d'une certaine valeur désirée et ce sur une plage de fréquence d'opération sans pour autant que la sensibilité ne dépasse une valeur maximale partout ailleurs sur le spectre fréquentiel. La méthode développée en 1984 s'applique aux systèmes stables mais des extensions de cette dernière aux systèmes instables et multi variables ont été récemment ajoutées.

Dans notre travail, nous avons appliqué la méthode B à la commande d'un système instable, en l'occurrence un système de lévitation magnétique, au moyen d'un schéma de commande à double boucle où la stabilisation est prise en compte dans la boucle interne et l'amélioration des performances dans la boucle externe. Les critères de synthèse du compensateur ont été étendus pour minimiser non seulement la sensibilité du système mais aussi le signal d'entrée à celui-ci et donc donner une solution au problème de sensibilité dans le cas mono variable.

Dans le premier chapitre, les notions de stabilité, de performance et de robustesse sont définies et explorées. Les exigences sur ces trois aspects du système commandé sont motivées et des

critères de mesure sont avancés. Un aperçu général des normes, leurs propriétés ainsi que leur utilisation est donné. Ces notions théoriques serviront d'outils lors des discussions dans les chapitres suivants.

Le deuxième chapitre comporte un exposé de la théorie de la méthode B. Le théorème original de 1984 appliqué aux systèmes stables est détaillé ; la méthode B appliquée aux systèmes instables est aussi présentée.

Dans le chapitre trois, un résumé de la théorie de la lévitation magnétique est donnée. Les différentes variantes sont citées avec un aperçu des avantages et inconvénients. Le système sur lequel la nouvelle méthode sera appliquée est ensuite modélisé et linéarisé.

Différentes méthodes de compensation sont appliquées à ce système dans le quatrième chapitre, parmi lesquelles la méthode B pour systèmes instables et celle du retour d'état.

La méthode de commande par double boucle est détaillée dans le cinquième chapitre. Les prérequis théoriques pour la validation de cette méthode sont expliqués et la synthèse des différents étages de compensation sont donnés. Le compensateur B permettant la solution au problème est synthétisé et les conditions suffisantes sont exprimées. L'efficacité de ce schéma est vérifiée à travers différents cas simulés.

Trois variantes du compensateur sont développées. En premier aucune condition n'est imposée sur le signal de commande, le compensateur est synthétisé pour garantir les limites sur la sensibilité et respecter la plage de minimisation de la sensibilité. Différents cas sont simulés en variant les conditions sur la sensibilité minimisée ε , la sensibilité maximale M , la plage de désensibilisation ω_s ainsi que la marge de phase. Les résultats sont discutés et des conclusions tirées par rapport à l'impact de chacun des paramètres sur le système en boucle fermée.

Ensuite, le signal de commande est limité et on laisse la plage de minimisation varier. Le compensateur synthétisé a pour objectif de limiter la sensibilité maximale, limiter le signal de commande tout en minimisant la sensibilité à ε sur la bande de fréquence la plus large. Des cas pour différentes valeur du signal de commande sont simulées et les résultats discutés.

Le compensateur de la deuxième variante est repris avec un algorithme pour minimiser l'énergie totale de commande, et ce en choisissant le gain de retour d'état adéquat sans influencer les performances atteintes par le compensateur. Enfin, un préfiltre est introduit pour

améliorer la réponse temporelle du système compensé. Des simulations sont réalisées pour confirmer l'efficacité de ces améliorations.

Dans le dernier chapitre, la méthode à double boucle est comparée à deux méthodes reconnues de commande : la commande H infini et la commande LQG. Les résultats des trois méthodes sont comparés dans des figures et des tableaux. Enfin une conclusion est tirée sur l'efficacité de la nouvelle méthode et des perspectives d'amélioration sont données. L'implémentation graphique de la méthode sur le logiciel Geogebra est présentée en annexe I, les programmes MATLAB sont listés en annexe II et annexe III.

CHAPITRE 1

DES NORMES, DE LA PERFORMANCE ET DE LA ROBUSTESSE

1.1 De l'importance de la mesure de performance des systèmes

Les systèmes dynamiques sont le plus souvent décrits par un ensemble d'équations différentielles, qui ne sont pas toujours linéaires. L'étude des modèles linéarisés de ces systèmes et des systèmes linéaires en général représente une partie importante du travail de commande des systèmes (Tao, 2003, p. 35).

La conception d'un compensateur, ou loi de commande, pour un système doit répondre à plusieurs critères relatifs aux spécifications désirées ou *performances* du système. Par ailleurs, la loi de commande doit garantir un ensemble de propriétés du système en dépit des imperfections du modèle adopté. Cet aspect est qualifié la *robustesse* de la loi de commande (Boyd et Barratt, 1991, p. 15).

Les spécifications de performance englobent les caractéristiques du comportement désiré du système : une bonne régulation apte à corriger les perturbations indésirables au système, qu'elle soit internes ou externes, une réponse temporelle désirée (temps de montée, dépassement, temps de stabilisation), des signaux de commande en-dessous des limites de saturation des actionneurs et senseurs. La robustesse du compensateur est principalement la capacité du compensateur de maintenir les performances du système quand ce dernier accuse des variations (dus à la dérive de l'alimentation, la température, ...etc.) ou si le modèle représentatif ne reproduit pas fidèlement le processus réel (ce qui est souvent le cas). La robustesse ne pouvant être garantie absolument (à 100%), la recherche de robustesse se fait souvent en établissant des *marges* de fonctionnement pour lesquels la robustesse doit être maintenue (Boyd et Barratt, 1991, p. 16).

Nous nous intéressons premièrement aux performances du système. Dans le but de réaliser une commande adéquate d'un système, nous devons pouvoir nous assurer que le compensateur

conçu répond aux spécifications de performance. Nous devons alors disposer d'outils de mesure de la performance d'un système. En d'autres termes, nous devons disposer de *mesures quantitatives* de performance, ou indicateurs de performance.

Le choix de ces indicateurs est dépendant de la nature des spécifications (temporelles et fréquentielles) et de la méthode de conception du compensateur. Il peut dépendre aussi de la nature du processus et de la finalité du contrôle : dans l'industrie chimique la variance des signaux de sortie est d'une importance capitale et sert d'indice de performance (Desborough et Harris, 1993, p. 1187) alors que dans l'industrie aéronautique l'importance est donnée à la stabilité et à la poursuite d'une référence (Tay, Mareels et Moore, 2012, p. 10).

L'étape initiale de la conception d'un compensateur est de définir les spécifications de performance et les indices selon lesquels la loi de commande sera appréciée. A partir de là la méthode de conception et les paramètres éventuels à optimiser seront choisis.

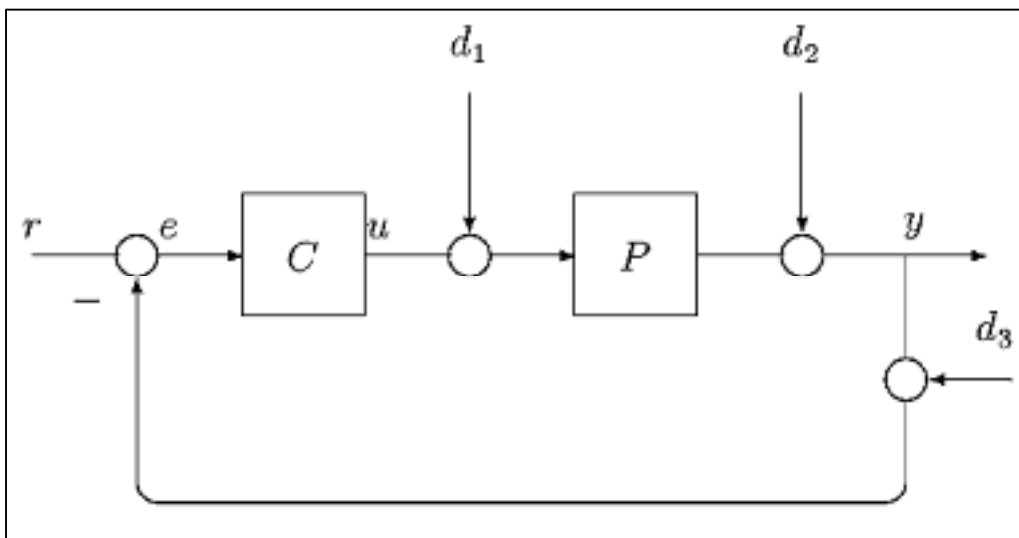


Figure 1-1 Schéma synoptique d'un système à rétroaction avec retour unitaire

On considère un système de rétroaction à retour unitaire dont le compensateur C est à concevoir. La Figure 1-1 montre un schéma synoptique d'un tel système, où P est le processus et C le compensateur. Le signal de référence est noté r , y est le signal de sortie et u le signal d'action. d_1 représente les perturbations à l'entrée du processus, d_2 représente les perturbations extérieures (dérive, bruits de mesures) et d_3 est le bruit de mesure.

La différence entre la référence et le signal de sortie du processus est représentée par e . Cette dernière, appelée erreur du système est importante dans la mesure de la performance du système.

L'entrée est le plus souvent un échelon appliqué au système en boucle fermée. La réponse de la boucle fermée à l'échelon, ou *réponse indicielle*, décrit la performance temporelle du système soumis à des signaux de commande constants sur de longues périodes. Elle sert de critère de conception. Cela est typiquement le cas lorsque le système comporte une seule entrée et une seule sortie (Boyd et Barratt, 1991, p. 172).

Parmi les critères qui servent d'outils de conception et de vérification des compensateurs on peut citer :

- la réponse à un échelon unitaire en régime permanent : celle-ci doit tendre asymptotiquement vers 1. En d'autres termes : $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$. Ceci se traduit dans le domaine fréquentiel par $\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 1$. L'écart de la sortie par rapport à l'unité est appelé *erreur statique*.
- la réponse transitoire : cruciale dans la définition des performances du système compensé. Elle est définie par : les temps de montée t_r , le temps de stabilisation t_s et le dépassement D .

Un autre critère de performance du système de la Figure 1-1 est le niveau d'énergie nécessaire au système pour atteindre le point de consigne à partir des conditions initiales, c'est-à-dire le signal u . Cette énergie doit être limitée pour différentes raisons, principalement (Boyd et Barratt, 1991, p. 190):

- La saturation d'un actuateur peut conduire soit à l'endommagement de l'actuateur ou à la saturation du système en introduisant des non linéarités. Cette contrainte se traduit par une valeur pic limite du signal de l'actuateur. Elle s'exprime par la *norme* H_∞ du signal u .
- Un signal d'actuateur important, mais pas nécessairement au-delà de la limite de saturation, induit une surchauffe de l'actuateur. Cette surchauffe peut réduire la durée de vie de ce dernier ou l'endommager et, donc,

détériorer le système. Cette contrainte est le plus souvent une limitation de la valeur efficace du signal u exprimée en fonction de *la norme H_2* de ce dernier.

- La ressource consommée par le système compensée doit être réduite dans un souci d'efficacité énergétique. Cette contrainte revient à minimiser la valeur moyenne du signal d'actuateur u . Ou en d'autres termes la *norme I* de ce signal (Toscano, 2013, p. 26).
- Les contraintes mécaniques sur les actionneurs peuvent réduire rapidement ses performances si ce dernier est soumis à des changements brusques et importants du signal d'actuateur, ou à-coups, (Li et al., 2006, p. 676). Cette contrainte est exprimée par la norme de la troisième dérivée du signal d'actuateur (à-coup ou jerk).

En plus de la condition de stabilité du système compensé en boucle fermée, ces critères de performance permettent de synthétiser des compensateurs, qui permettent de satisfaire autant que faire se peut aux critères de performance choisis (temps de réponse, temps de stabilisation, dépassement, énergie d'actuateur...etc.).

1.2 Méthodes de commande

La nécessité de répondre à ces critères de performance et de stabilité a mené au développement de différentes méthodes de commande.

1.2.1 Commande classique

Les premières méthodes de commande pouvaient être résolues graphiquement pour la plupart. Elles sont désignées par le terme commande classique (Bensoussan, 2008, p. 8; Levine, 1996, p. 282). Elles s'appliquent à des systèmes monoentrée-monosortie. Les critères d'encerclement de Nyquist, la conception sur le plan de Nichols ou le lieu géométrique des racines d'Evans sont des méthodes qui permettent de déduire des conclusions sur la boucle fermée à partir des

caractéristiques de la boucle ouverte (Levine, 1996, p. 173). Il faut ajouter à cela le critère algébrique de Routh Hurwitz qui permet de déduire la stabilité de la boucle fermée.

1.2.2 Commande moderne

Les années 60 ont vu le développement des méthodes de commande alternative, la commande par variables d'état, désignée par le terme commande moderne. Les systèmes sont décrits par des équations différentielles et des critères de stabilité asymptotiques ont été développés. Les théories de Weiner et de Kalman (entre autres) ont permis d'élaborer une théorie complète applicable à des signaux stochastiques multientrées-multisorties (Zhou, Doyle et Glover, 1996, p. 208).

Les problèmes de commande ont été reformulés pour des signaux échantillonnés plutôt que des signaux continus. La théorie de la commande peut être exprimée dans le domaine des signaux continus ou discrets. Dans ce dernier cas, on parle de commande numérique (Bensoussan, 2008, p. 8).

1.2.3 Commande robuste

Les années 80 ont vu émerger la commande robuste (commande H_∞ introduite par G. Zames) qui s'est intéressée à l'effet des erreurs (ou des incertitudes) de modélisation sur la performance du système commandé (Tay, Mareels et Moore, 2012, p. 4).

Ces principales familles de la commande visent à répondre aux objectifs suivants :

- Stabilisation du système pour éviter les saturations et les emballements de toutes sortes.
- Performance du système pour en améliorer la réponse fréquentielle.
- Robustesse du système commandé en vue de maintenir les deux objectifs précédents en dépit des variations associées au processus commandé.

Précisons que ces objectifs peuvent être complémentaires ou non et qu'il faudra faire preuve d'ingéniosité pour faire les bons compromis (Francis et Zames, 1982).

1.2.4 Commande optimale

Dans la commande optimale, le problème de commande est formulé sous la forme d'un modèle mathématique du système avec les contraintes de performances et d'énergie. Ce problème est alors résolu en minimisant une fonction de coût. Le compensateur ainsi obtenu est considéré optimal, et offre un compromis entre les exigences de performances et l'énergie consentie pour achever cette commande. Le concepteur choisit le compromis obtenu en plaçant des pondérations sur les paramètres de minimisation d'énergie (Bensoussan, 2008, p. 295).

1.2.5 Originalité du travail

Le dilemme historique de la commande est celui d'une optimisation de la performance fréquentiel au détriment des performances de la réponse temporelle et vice versa. À titre d'exemple, la commande robuste définit un compensateur offrant une sensibilité minimum pour garantir un comportement robuste dans le domaine fréquentiel et pour lequel la performance temporelle devient secondaire.

Ce travail contribue au double objectif d'optimisation simultanée dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel grâce à la commande quasi-linéaire (Kelemen et Bensoussan, 2004).

Ce travail s'inscrit dans l'approche pratique de la commande quasi-linéaire tel que proposée par Bensoussan (Bensoussan, 2014). Il vise à maintenir les mêmes résultats de performances en tenant compte de la minimisation du signal de commande afin d'éviter le phénomène de saturation.

1.3 Les normes

On voit bien que la définition des critères de performance nous amène souvent à faire appel aux normes des signaux (de sortie, d'actuateur ou de perturbation). En effet, dans un grand nombre de méthodes de conception des compensateurs, les normes sont des outils mathématiques puissants. Dans ce qui suit, nous allons faire un résumé des principales normes des signaux, les normes induites (où normes d'opérateurs) que nous utiliserons pour les systèmes, les méthodes de calcul et l'utilisation de ces normes.

1.3.1 Norme

Les notions de norme sont définies dans de nombreux ouvrages mathématiques tels que ceux de (Stewart, 1973).

Dans un espace vectoriel (linéaire) \mathbb{M} sur un champ scalaire \mathbb{K} , on définit la relation qui associe à chaque élément x de \mathbb{M} un nombre réel non négatif appelé *norme de x* et dénoté $\|x\|$, qui satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \|x\| &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \cdot \|x\|, \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{K} \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|, \text{ tel que } x, y \in \mathbb{M} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Toute relation qui satisfait les trois conditions citées ci-dessus est considérée une norme de l'espace \mathbb{M} et la paire $(\mathbb{M}, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé. L'espace \mathbb{M} peut admettre plusieurs normes avec une définition propre à chacune.

Certaines normes présentent la propriété additionnelle :

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{M} \quad (1.2)$$

Elles sont alors sous-multiplicatives.

1.3.2 Normes équivalentes

Soient deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ définies sur \mathbb{M} . Ces deux normes sont dites *équivalentes* si et seulement si il existe deux nombres réels positifs α et β tel que :

$$\alpha \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta \|x\|_a \quad \forall x \in \mathbb{M} \quad (1.3)$$

Si deux normes sont équivalentes, toute série convergente en termes d'une norme convergera en termes de sa norme équivalente. Il en va de même pour la continuité et la majoration/minoration.

Si deux normes sont équivalentes tel que défini plus haut, alors toute série qui converge dans l'espace normé $(\mathbb{M}, \|\cdot\|_a)$ convergera dans l'espace normé $(\mathbb{M}, \|\cdot\|_b)$.

1.3.3 Normes d'un vecteur

Soit u un vecteur sur \mathbb{R}^n . On définit les normes suivantes :

Norme 1 (distance de Manhattan)

$$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i| \quad (1.4)$$

Norme 2 (Euclidienne)

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i|^2} \quad (1.5)$$

Norme ∞ (Valeur pic)

$$\|u\|_\infty = \max_i |u_i| \quad (1.6)$$

En généralisant, on a :

Norme p

$$\|u\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |u_i|^p} \quad (1.7)$$

Soient u et v deux vecteurs sur \mathbb{R}^n .

On note les propriétés suivantes :

Inégalité de Hölder

$$\left\| \sum_{i=1}^n u_i v_i \right\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q \quad (1.8)$$

$$\text{Pour tout } \begin{cases} p > 1 \\ q > 1 \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{cases}$$

Inégalité de Minkovski

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |u_i + v_i|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |u_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |v_i|^p} \quad (1.9)$$

Pour tout $p \in [1, \infty[$

Équivalence des normes

On a pour $x \in \mathfrak{R}^n$:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \quad (1.10)$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \quad (1.11)$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty \quad (1.12)$$

On en déduit que les normes de vecteur 1, 2 et ∞ sont équivalentes sur \mathfrak{R}^n . Enfin, on peut aussi écrire :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \quad (1.13)$$

1.3.4 Normes d'un signal

Soit $u(t)$ un signal continu sur \mathfrak{R} . On définit les normes suivantes :

Norme 1

$$\|u\|_1 = \int_0^{+\infty} |u(t)| dt \quad (1.14)$$

Norme 2

$$\|u\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} |u(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (1.15)$$

Norme ∞

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{t \geq 0} |u(t)| \quad (1.16)$$

Dans le cas général :

La norme p

$$\|u\|_p = \left(\int_0^{+\infty} |u(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (1.17)$$

On note les propriétés suivantes :

Inégalité de Hölder

$$\int_0^{+\infty} |u(t)v(t)| dt \leq \left(\int_0^{+\infty} |u(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{+\infty} |v(t)|^q dt \right)^{1/q} \quad (1.18)$$

$$\text{Pour tout } \begin{cases} p > 1 \\ q > 1 \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{cases}$$

Inégalité de Schwarz

Dans l'inégalité de Hölder, si $p = q = 2$ on a :

$$\int_0^{+\infty} |u(t)v(t)| dt \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} u(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^{+\infty} v(t)^2 dt} \quad (1.19)$$

Inégalité de Minkowski

$$\left(\int_0^{+\infty} |u(t) + v(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^{+\infty} |u(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_0^{+\infty} |v(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (1.20)$$

Pour tout $p \in [1, \infty)$

1.3.5 Espace de signaux

En nous basant sur la finitude des normes des signaux, nous pouvons définir différents espaces de signaux avec lesquels nous travaillerons sur les systèmes.

Espace L^1

Il est défini par :

$$L^1 = \{x(t) \in \mathcal{R} : \|x\|_1 < \infty\} \quad (1.21)$$

Espace L^2

Il est défini par :

$$L^2 = \{x(t) \in \mathcal{R} : \|x\|_2 < \infty\} \quad (1.22)$$

Espace L^∞

Il est défini par :

$$L^\infty = \{x(t) \in \mathcal{R} : \|x\|_\infty < \infty\} \quad (1.23)$$

En général :

Espace L^p

Il est défini par :

$$L^p = \{x(t) \in \mathcal{R} : \|x\|_p < \infty\} \quad (1.24)$$

On a les propriétés suivantes (Tao, 2003, p. 49):

$$x(t) \in L^1 \cap L^\infty \Rightarrow x(t) \in L^p, p \in [1, \infty[\quad (1.25)$$

$$x(t) \in L^1 \text{ ou } x(t) \in L^2 \not\Rightarrow x(t) \in L^\infty \quad (1.26)$$

1.3.6 Normes induites

Soient \mathbb{M} et \mathbb{N} deux espaces linéaires, soient $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ deux normes définies sur \mathbb{M} et \mathbb{N} . Soit T un opérateur linéaire borné de \mathbb{M} dans \mathbb{N} . Nous définissons la norme d'opérateur de T , ou *norme induite* par les normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$, comme le plus petit majorant du gain entre l'entrée x et la sortie $y = Tx$:

$$\|T\| = \|T\|_{a,b} = \inf\{M : \|Tx\|_b \leq M\|x\|_a, \forall x \in \mathbb{M}\} \quad (1.27)$$

Ou alternativement

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_b : \|x\|_a \leq 1, x \in \mathbb{M}\} \quad (1.28)$$

On peut aussi réécrire :

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|_b}{\|x\|_a} : x \neq 0, x \in \mathbb{M}\right\} \quad (1.29)$$

On note la propriété sous-multiplicative des normes d'opérateur, ou normes de systèmes.

Soient T et S deux opérateurs de \mathbb{M} dans \mathbb{N} .

Alors :

$$\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \quad (1.30)$$

1.3.7 Norme induite de matrices

Les matrices sont utiles pour représenter les opérateurs linéaires entre deux espaces vectoriels. De la même manière que nous avons défini la norme induite des opérateurs, nous définissons les normes induites de matrice comme suit :

Soit $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$, la norme induite de A est

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathcal{R}^n, \|x\|_a=1} \|Ax\|_a \quad (1.31)$$

$$\|A\| = \max_{x \in \mathcal{R}^n, \|x\|_a \neq 0} \frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a} \quad (1.32)$$

Où $\|\cdot\|_a$ est une des normes de vecteurs définies plus haut ($\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ ou $\|\cdot\|_p$).

1.3.8 Normes compatibles

On dit que deux normes sont compatibles si :

$$\|Ax\|_a \leq \|A\|_\beta \|x\|_a \quad (1.33)$$

Où $\|\cdot\|_a$ est une norme vectorielle et $\|\cdot\|_\beta$ est une norme induite de matrice. En outre :

$$\frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a} \leq \|A\|_\beta, \text{ pour } x \neq 0 \quad (1.34)$$

Si on définit

$$\|A\|_\alpha = \max_{x \in \mathcal{R}^n, \|x\|_a \neq 0} \frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a} \quad (1.35)$$

Alors :

$$\|A\|_\alpha \leq \|A\|_\beta \quad (1.36)$$

Pour toutes les normes compatibles, on a :

$$\|I_n\| = 1 \quad (1.37)$$

1.3.9 Différentes normes matricielles

De par la définition de la norme induite d'une matrice et en se basant sur les normes vectorielles définies plus haut, on retrouve, pour $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$, les normes induites suivantes :

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (1.38)$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (1.39)$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i \{A^* A\}} = \sigma_{\max}(A), \text{ norme spectrale} \quad (1.40)$$

Où A^* est la matrice adjointe et transposée de A , λ_i sont les valeurs propres et σ_{\max} est la valeur singulière maximale.

On peut noter que :

$$\|A^T\|_2 = \|A\|_2 \quad (1.41)$$

$$\|A^T\|_1 = \|A\|_\infty \quad (1.42)$$

$$\|A^T\|_\infty = \|A\|_1 \quad (1.43)$$

On définit d'autres normes de matrices.

La norme de Frobenius:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{trace}(A^* A)} = \sqrt{\sum_1^{\min(n,m)} \sigma_i(A)^2} \quad (1.44)$$

Cette norme n'est pas induite par aucune norme vectorielle et n'est pas compatible.

En outre on a : $\|I_n\|_F = \sqrt{n} \neq 1$ pour tout $n \in]1, \infty[$

La norme de Frobenius est néanmoins sous-multiplicative :

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F \quad (1.45)$$

On a aussi :

$$\|A^T\|_F = \|A\|_F \quad (1.46)$$

La norme max :

Elle est définie par :

$$\|A\|_{\max} = \max_{i,j} |a_{ij}| \quad (1.47)$$

Cette norme n'est pas sous-multiplicative mais on a :

$$\|AB\|_{\max} \leq n\|A\|_{\max}\|B\|_{\max} \quad (1.48)$$

La norme \mathcal{H}_2 :

Soit $u(t) \in \mathcal{R}$ un signal à énergie finie et soit $u(\omega)$ sa représentation fréquentielle, alors selon le théorème de Parseval :

$$\|u\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |u(\omega)|^2 d\omega} \quad (1.49)$$

De façon analogue, pour un système g , à une variable, défini par sa réponse impulsionnelle $g(t)$ dont l'équivalent dans le domaine fréquentiel est $G(\omega)$, on définit la norme :

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega} \quad (1.50)$$

Dans le cas d'un système à plusieurs variables représenté par une matrice de réponses fréquentielles $G = \{g_{ij}(\omega)\}$, on définit la norme :

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{H}_2} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{ij} |g_{ij}(j\omega)|^2 d\omega} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{ij} g_{ij}(-j\omega) g_{ij}(j\omega) d\omega} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}(G(-j\omega)^T G(j\omega)) d\omega} \end{aligned} \quad (1.51)$$

Cette norme est appelée la norme \mathcal{H}_2 de l'opérateur.

Dans le cas d'un système G , stable et strictement propre, décrit par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1.52)$$

Où A, B, C et D sont des matrices de dimension adéquates. Alors la norme \mathcal{H}_2 du système est donnée par (Toscano, 2013, p. 40) :

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\text{trace}(CPC^T)} \quad (1.53)$$

Tel que P est la solution de l'équation matricielle de Lyapunov :

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \quad (1.54)$$

La norme \mathcal{H}_∞ :

Soit $u(t) \in \mathcal{R}$ un signal à énergie finie et soit $u(\omega)$ sa représentation fréquentielle.

On définit la norme \mathcal{H}_∞ de u comme :

$$\|u\| = \sup_{\omega} |u(\omega)| \quad (1.55)$$

De la même manière nous définissons la norme \mathcal{H}_∞ d'un système G , qui est la norme induite par la norme 2, représenté par sa réponse fréquentielle :

$$\|G\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega} |G(\omega)| \quad (1.56)$$

Dans le cas d'un système multi variable, la norme \mathcal{H}_∞ est la norme induite par la norme L_2 :

$$\|G\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\|u\|=1} \frac{\|Gu\|}{\|u\|} \quad (1.57)$$

Elle est donnée par (Bensoussan, 1984b, pp. 1114-1115) :

$$\|G\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sqrt{\sup_{\omega} \{\lambda_{\max}(j\omega)\}} \quad (1.58)$$

Et donc:

$$\|G\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(\omega)) \quad (1.59)$$

CHAPITRE 2

METHODE B, THEORIE ET APPLICATION

2.1 Motivation

Soit le système de rétroaction à retour unitaire décrit dans la Figure 2-1.

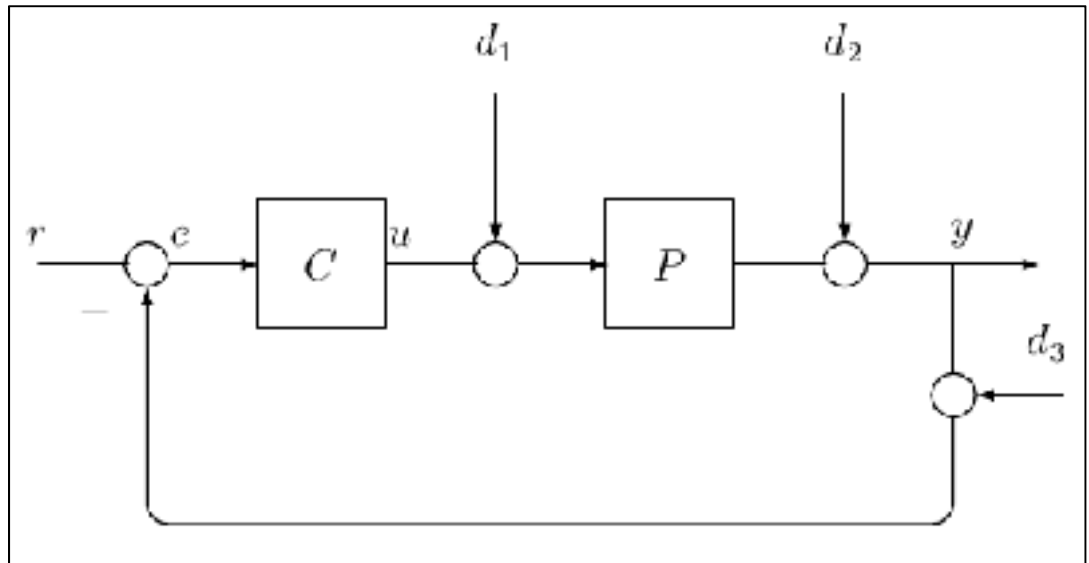


Figure 2-1 Schéma synoptique d'un système à rétroaction à retour unitaire

Avec P linéaire à temps invariable (LTI), inversible (à minimum de phase) et strictement propre. Les équations suivantes découlent directement de cette configuration :

$$\begin{cases} y = PC(1 + PC)^{-1}r + P(1 + PC)^{-1}d_1 + (1 + PC)^{-1}d_2 - PC(1 + PC)^{-1}d_3 \\ e = (1 + PC)^{-1}r - P(1 + PC)^{-1}d_1 - (1 + PC)^{-1}d_2 - (1 + PC)^{-1}d_3 \\ u = C(1 + PC)^{-1}r - PC(1 + PC)^{-1}d_1 - C(1 + PC)^{-1}d_2 - C(1 + PC)^{-1}d_3 \end{cases} \quad (2.1)$$

Où nous avons omis le paramètre « (s) » des expressions $y(s), e(s), u(s), r(s)$ $d_1(s), d_2(s), d_3(s), P(s)$ et $C(s)$ pour ne pas encombrer les équations.

Les 12 fonctions de transfert entre les différents signaux du système définissent la stabilité et les performances de ce dernier.

Le système d'équations peut s'écrire sous forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} y \\ e \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PC(1+PC)^{-1} & P(1+PC)^{-1} & (1+PC)^{-1} & -PC(1+PC)^{-1} \\ (1+PC)^{-1} & -P(1+PC)^{-1} & -(1+PC)^{-1} & -(1+PC)^{-1} \\ C(1+PC)^{-1} & -PC(1+PC)^{-1} & -C(1+PC)^{-1} & C(1+PC)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

La stabilité du système nécessite la stabilité des 12 fonctions de transferts du système. Celles-ci se résument à la stabilité de $(1+PC)^{-1}$, $P(1+PC)^{-1}$, $PC(1+PC)^{-1}$ et de $C(1+PC)^{-1}$ (Middleton, 1991, p. 2).

Les fonctions de transmittance et de sensibilité du système sont définies, respectivement, comme :

$$\begin{cases} T = PC(1+PC)^{-1} \\ S = (1+PC)^{-1} \\ T + S = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

Notre but est de maintenir le signal de sortie y aussi proche que possible de la consigne r d'un côté et, de l'autre côté, réduire la sensibilité du système aux perturbations. Donc nous aurons atteint notre but si nous avons :

$$\begin{cases} T = 1 \\ S = 0 \end{cases}, \text{ Pour tout } \omega \quad (2.4)$$

Mais dans le cas des systèmes causaux (dont tous les systèmes physiques réels) auxquels nous nous intéressons, nous avons la propriété (Bensoussan, 1984a, p. 321) :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} P(\omega) = 0 \quad (2.5)$$

Dans ce cas, les fonctions de transmittance et sensibilité deviennent inévitablement :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow \infty} T(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} PC(1+PC)^{-1} = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} S(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (1+PC)^{-1} = 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

On voit donc qu'il est impossible de maintenir les performances désirées sur tout le spectre fréquentiel. L'équation (2.4) devient alors :

$$\begin{cases} T \approx 1 \\ S \approx 0 \end{cases}, \text{ Pour } \omega \leq \omega_c \quad (2.7)$$

Tel que $]0, \omega_c[$ est l'intervalle fréquentiel d'opération du système appelée aussi bande passante du système. Nous appelons ω_c la fréquence de coupure du système.

2.1.1 Limitations sur la minimisation de la sensibilité

En réduisant la sensibilité sur la bande de fréquences désirée, il résulte un dépassement de cette dernière qui représente un risque d'amplification des perturbations en hautes fréquences. La Figure 2-2 montre les modules de la transmittance et de la sensibilité d'un système stable.

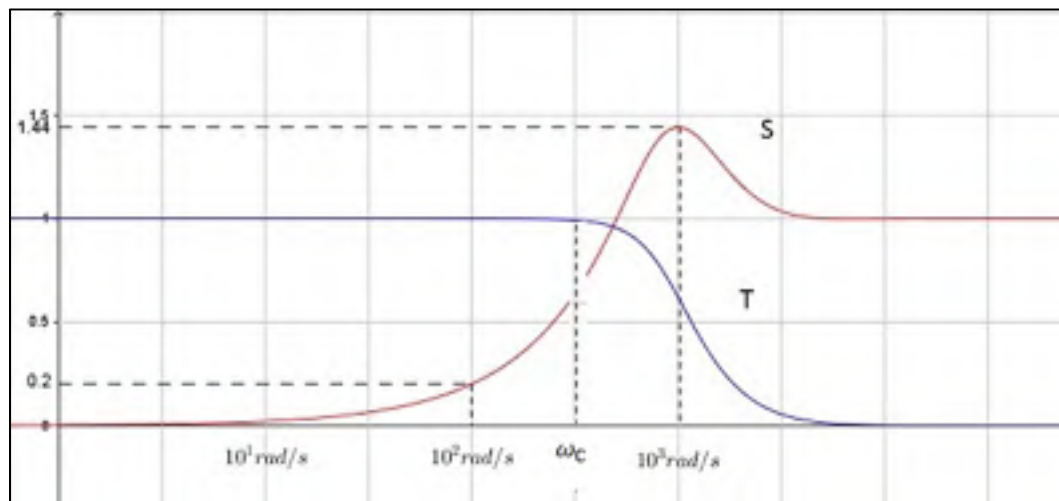


Figure 2-2 Transmittance et sensibilité d'un système en boucle fermée

On voit que, pour les fréquences inférieures à 100 rad/s, la sensibilité est maintenue en dessous de 0.2. Ceci répond à notre critère de conception pour la réduction de S sur une bande passante d'intérêt. La transmittance est par conséquent maintenue proche de l'unité. Au-delà de la fréquence de bande passante, le système tend vers le comportement en haute fréquence : S tend vers l'unité tandis que T s'atténue vers zéro. Mais vers la fréquence 1000 rad/s on note un dépassement où S atteint 1.44. Ce dépassement découle des limitations sur la minimisation de la sensibilité tel que décrites par les intégrales logarithmiques de la sensibilité de Bode (Freudenberg et Looze, 1983; Middleton et Braslavsky, 2000).

En effet pour un système de rétroaction causal, on a $\lim_{s \rightarrow \infty} sL(s) = 0$, tel que $L = PC$ est le gain de boucle. Pour un tel système décrit par la Figure 2-1, et avec la sensibilité du système définie par (2.3) on a l'équation suivante :

$$\int_0^\infty \log|S(\omega)| d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N_p} \Re(p_i) \quad (2.8)$$

Tel que N_p est le nombre de pôles instables du système, i.e. à partie réelle positive.

Dans le cas où le système est stable, le côté droit de (2.8) s'annule et on retrouve la forme standard de l'équation logarithmique de Bode. Autrement dit, la surface délimitée en dessous de la valeur 1 par la courbe de S est égale à la surface délimitée par cette même courbe au-dessus de la valeur 1.

La conséquence de l'équation (2.8) est que la surface sous la courbe de la sensibilité logarithmique doit être égale à zéro, dans le cas stable, ou un nombre positif. On ne peut donc réduire le module de la sensibilité S sur une bande de fréquences sans la modifier dans la bande de fréquence complémentaire. Ces résultats expliquent la restriction sur les méthodes de réduction de la sensibilité et le risque de déstabilisation du système sur une bande de fréquences où $|S(\omega)|$ atteint son maximum (Zhou, Doyle et Glover, 1996, p. 147).

Formulation du problème

En tenant compte de ce qui précède nous pouvons exprimer le critère de conception du compensateur C de la boucle fermée de la Figure 2-1 comme suit :

Soit P un système stable et à minimum de phase. Nous désirons nous assurer que le système en boucle fermée présente une sensibilité inférieure à une valeur arbitrairement petite ε pour une bande de fréquences d'intérêt où $\omega \leq \omega_s$. Nous désirons aussi nous assurer que la sensibilité du système reste en dessous d'une valeur maximale M sur tout le spectre fréquentiel.

La méthode B (Bensoussan, 1984a; 2014; 2015) est une méthode de synthèse de compensateur qui répond au critère ci-dessus. Nous détaillons dans ce qui suit la méthode B pour les systèmes stables à minimum de phase. La méthode est ensuite étendue aux systèmes instables à minimum de phase.

2.2 Méthode B appliquée aux systèmes stables :

Soit P un système stable et à minimum de phase ou en d'autres termes P ne comporte pas de pôles ou de zéros dans le demi plan complexe $\Re(s) \geq 0$. Si la boucle fermée du système de rétroaction avec compensateur répond aux critères de synthèse que nous avons fixés, nous aurons le diagramme de Nyquist du système en boucle ouverte montré dans la Figure 2-3 (nous reprenons l'exemple de la Figure 2-2).

On voit que le diagramme de la boucle ouverte ($L = CP$) est extérieur au cercle de sensibilité $S_{\min} = 0.2$ de rayon $\frac{1}{S_{\min}}$ pour les basses fréquences, ce qui garantit que la sensibilité est en dessous de cette valeur sur la bande passante. En hautes fréquences, le diagramme reste en dehors du cercle de sensibilité $S_{\max} = 1.44$ de rayon $\frac{1}{S_{\max}}$ qui définit la valeur supremum de la sensibilité.

La stabilité est garantie en conséquence car, en maintenant le diagramme de Nyquist à la droite du cercle de sensibilité maximale, nous nous assurons aussi qu'il n'y aura pas d'encerclement du point $(-1,0)$. Le système n'ayant pas de pôles à partie réelle négative, cela assure la stabilité. Notons que la conception vise à avoir une boucle fermée unitaire sur la bande de fréquence d'opération, ce qui se traduit par le diagramme de Nyquist qui doit être le plus proche possible de la droite -0.5 et ce sur la plage la de fréquences la plus large possible.

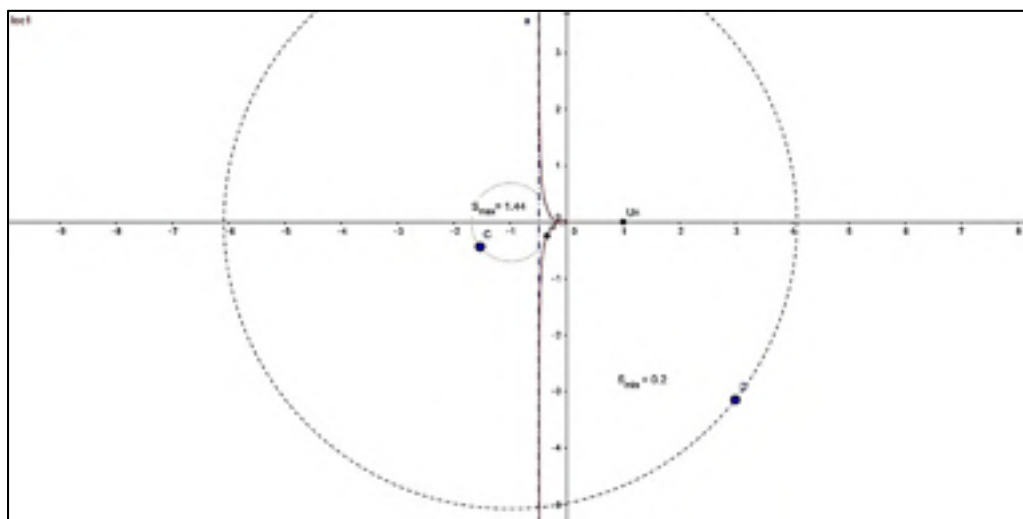


Figure 2-3 Diagramme de Nyquist de la boucle ouverte et cercles de sensibilité

Pour détailler la conception du compensateur qui accomplira ces performance, nous définissons la propriété d'atténuation (Bensoussan, 1984a, p. 324).

Propriété d'atténuation

Soit $P(s)$ une fonction de transfert d'un système stable et strictement propre.

On dit de $P(s)$ qu'elle présente la propriété d'atténuation s'il existe des constantes positive c et ω_0 et un entier q pour lesquels est satisfaite la condition :

$$|P(s)| > \frac{c}{|s|^q} \quad (2.9)$$

Et ce dans la région $\Re(s) \geq 0$ et $|s| \geq \omega_0$

Donc, dans les hautes fréquences le module de la réponse fréquentielle s'approche de zéro mais avec une atténuation moindre que celle d'une réponse fréquentielle qui a un pôle d'ordre q à zéro. La Figure 2-4 donne une illustration graphique de la propriété d'atténuation.

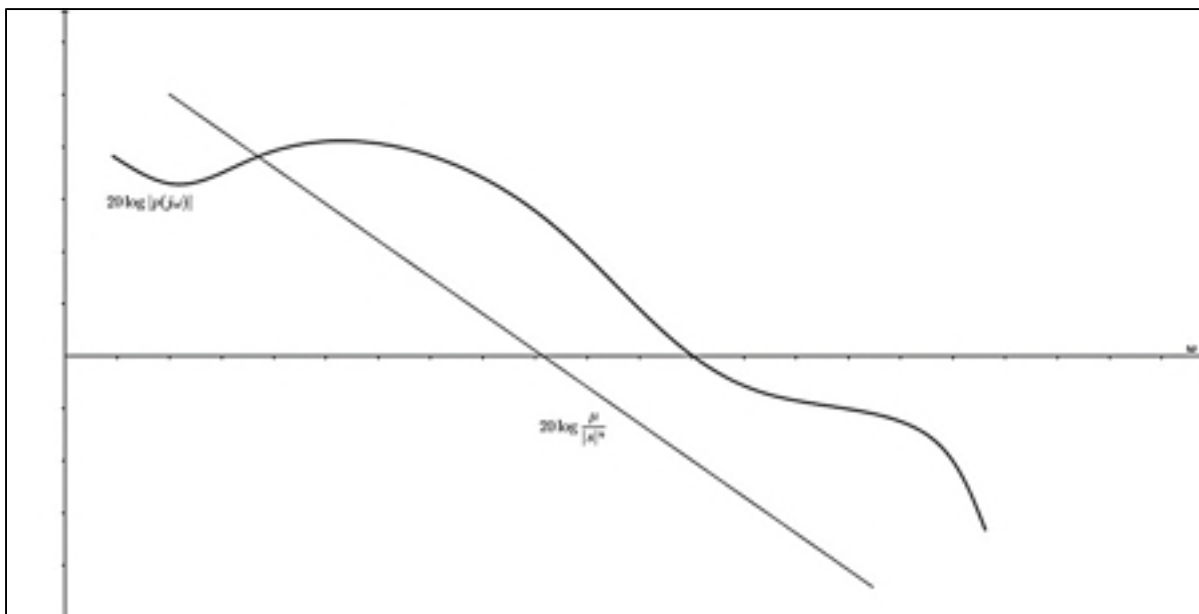


Figure 2-4 Propriété d'atténuation d'un système

Cette propriété peut être exprimée de cette manière : le module de l'inverse de la fonction de transfert $P(s)$, présentant la propriété d'atténuation, est toujours inférieur à une réponse

fréquentielle qui a un zéro d'ordre n à zéro. Nous pouvons maintenant énoncer l'élément principal de la méthode B pour les systèmes stables énoncé dans (Bensoussan, 1984a, p. 330).

Théorème

Soit $P(s)$ la fonction de transfert d'un système stable strictement propre à minimum de phase doté de la propriété d'atténuation tel que c et ω_0 positives et un entier q tel que :

$$|P(j\omega)| > \frac{c}{|s|^q}, \text{ pour tout } |s| > \omega_0 \quad (2.10)$$

Pour toutes valeurs $0 < \varepsilon < 1$, $M > 1$ et une fréquence ω_1 , il existe un compensateur $C(s)$ pour lequel la sensibilité du système de rétroaction $S(s) = (1 + P(s)C_B(s))^{-1}$ est stable, bornée et satisfait aux conditions :

$$\|(1 + PC_B)^{-1}\|_{\infty} < M \quad (2.11)$$

$$\|(1 + PC_B)^{-1}\|_{\omega_1} < \varepsilon \quad (2.12)$$

Tel que $\|(1 + PC_B)^{-1}\|_{\omega_1} \triangleq \sup_{|\omega| < \omega_1} (1 + P(j\omega)C_B(j\omega))^{-1}$

Ce compensateur est définie par :

$$C_B(s) = P^{-1}(s) \left(\frac{k_1}{s + \omega_1} \right) \left(\frac{\omega_2}{s + \omega_2} \right)^k \quad (2.13)$$

Les constantes k, k_1, ω_1 et ω_2 sont choisies en fonction des critères suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} k \geq n \\ k_1 \geq \max \left[2^{(k+1)/2} \omega_1 \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \right), \omega_1 \left(\frac{M-1}{M} \right) \right] \\ \omega_b > \omega_1 \left[\frac{k_1^2}{\omega_1^2 \left(1 - \frac{1}{M} \right)^2} - 1 \right]^{1/2} \\ k \tan^{-1} \left(\frac{\omega_b}{\omega_2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\omega_b}{\omega_1} \right) < \frac{\pi}{2} \\ \omega_2 > \max(\omega_b, s_0) \end{array} \right. \quad (2.14)$$

La preuve de ce théorème est détaillé dans (Bensoussan, 1984a, pp. 333,334).

2.3 Méthode B appliquée aux systèmes instables :

Soit P un système linéaire à temps invariant décrit par sa fonction de transfert $P(s)$ instable, inversible et strictement propre. C'est-à-dire que :

- $P(s)$ comporte un ou plusieurs pôles à partie réelle positive,
- $P(s)$ ne comporte pas de zéros à partie réelle positive i.e. à minimum de phase,
- $\lim_{s \rightarrow \infty} P(s) = 0$.

Nous poserons aussi que la fonction de transfert $P(s)$ présente la propriété d'atténuation i.e. il existe des constantes positive c et ω_0 et un entier q pour lesquels est satisfaite la condition :

$$|P(s)| > \frac{c}{|s|^q} \quad (2.15)$$

Et ce dans la région $\Re(s) \geq 0$ et $|s| \geq \omega_0$.

Nous pouvons décomposer $P(s)$ en une partie à minimum de phase $P_1(s)$ et une partie instable $P_2(s)$ tel que :

$$P(s) = P_1(s)P_2(s) \quad (2.16)$$

On définit alors la fonction $H(s)$ tel que :

$$H(s) = \frac{c'}{(s + \omega_0)^{q'}} P_2(s)^{-1} P(s) = \frac{c'}{(s + \omega_0)^{q'}} P_1(s) \quad (2.17)$$

On choisit $q' \leq q$ tel que le critère d'encerclement de Nyquist est respecté. De plus, c' assure que $H(s)$ présente le même comportement que $P(s)$ en hautes fréquences ($|s| \geq \omega_0 \gg 1$).

$$\|P(s)H(s)^{-1} - 1\| \leq \alpha < 1 \text{ pour } |s| \geq \omega_0 \quad (2.18)$$

Nous construisons le compensateur comme suit :

$$C_B(s) = H^{-1}(s)J(s) = \left(\frac{1}{c'}\right) (s + \omega_0)^{q'} P_1^{-1}(s) J(s) \quad (2.19)$$

Tel que :

$$J(s) = k_1 J_1(s) J_2(s) J_3(s) \quad (2.20)$$

Ce compensateur se décompose en parties :

- $k_1 J_1(s)$ est un filtre à gain élevé qui assure une réponse ultra rapide. On peut donner la forme :

$$k_1 J_1(s) = k_1 \frac{\omega_1}{s + \omega_1}$$

- $J_2(s)$ est une chaîne de compensateurs à avance/retard de phase dans les fréquences intermédiaires. Il prend la forme :

$$J_2 = \prod_{i=1}^n \frac{s + z_i}{s + p_i}$$

- $J_3(s)$ est un filtre passe bas opérant en hautes fréquences qui assurent que le compensateur $C(s)$ est strictement propre. Il peut prendre la forme générale suivante :

$$J_3 = \prod_{i=1}^k \frac{\omega_{2i}}{s + \omega_{2i}}, k \geq q$$

Le choix de ω_{2i} peut obéir à des objectifs de performance ou tout autre considération visant à optimiser le fonctionnement du compensateur C_B . La logique derrière cette construction du compensateur C_B est détaillée dans (Bensoussan, 2015, pp. 45,46). Les circuits $J_1(s)$ et $J_3(s)$ assurent la stabilité et la robustesse du système en boucle fermée, $J_2(s)$ améliore la réponse temporelle sans affecter la stabilité ou la robustesse. L'objectif de la conception du compensateur C_B est de satisfaire les deux inégalités (2.11) et (2.12).

La méthodologie de conception est comme suit (Bensoussan, 2015, p. 46) :

- La fréquence ω_1 est choisie pour être supérieure à la bande passante désirée du système en boucle ouverte,
- Le gain k_1 et la fréquence ω_2 sont ajustés de manière à satisfaire l'équation :

$$\sup_{|\omega| < \omega_1} |J(\omega)| > \left[\inf(P(\omega)H^{-1}(\omega)) \right]^{-1} \left[\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \right] \quad (2.21)$$

On peut choisir ω_2 en utilisant les méthodes de conception classiques de la manière suivante. L'objectif premier est d'obtenir une marge de phase satisfaisante. Les marges de gain et de phase sont améliorées lorsque M s'approche de l'unité. On définit les fréquences : ω_a pour laquelle tous les pôles instables sont compris dans la région $|s| \leq \omega_a$, la fréquence ω_0 pour laquelle $H(s)$ et $P(s)$ ont le même comportement pour $|s| \geq \omega_0$ et $\omega_x \geq \max(\omega_1, \omega_0, \omega_a)$. Soit ω_p la fréquence de coupure désirée du système compensé en boucle fermée, tel que $\omega_p \geq \omega_x$, On aura alors à la fréquence ω_p le gain k_1 qui sera fonction de $\frac{\omega_p}{\omega_1}$ et de $\frac{\omega_p}{\omega_2}$ et la phase de J à cette même fréquence est $\left(\tan^{-1} \frac{\omega_p}{\omega_1} + k \tan^{-1} \frac{\omega_p}{\omega_2} \right)$. Donc le choix de k_1 et ω_2 est fait de manière à garantir une marge de phase se rapprochant de celle idéale, à savoir 60° . La dépendance de k_1 et ω_2 souligne la nature quasi-linéaire du compensateur de la méthode B.

L'étape finale de la conception du compensateur $C_B(\omega)$ et le filtre $J_2(\omega)$. Celui-ci est conçu pour permettre à la courbe polaire du système en boucle ouverte (diagramme de Nyquist) d'adhérer à la droite $(-0.5, 0)$ dans le plan complexe, qui correspond à une transmittance en boucle fermée $T(s) = 1$, et ce sur la plus grande plage de fréquences intermédiaires possible.

CHAPITRE 3

SYSTÈME DE LÉVITATION MAGNÉTIQUE : PRÉSENTATION ET MODÉLISATION

3.1 Lévitación magnétique

La lévitation magnétique ou sustentation magnétique est l'interaction de champs magnétiques (naturels ou électromagnétiques) qui résultent en la suspension d'un objet sans support et éventuellement son déplacement. Une des premières observations du phénomène a été faite par J. Henry qui nota qu'un conducteur transportant un courant et enroulé autour d'une âme ferromagnétique pouvait générer une portance vis-à-vis de la gravité (Sangster, 2012, p. 35). Néanmoins, la nature inversement proportionnelle de la force ainsi créée rend impossible de trouver un état stable dans toutes les combinaisons impliquant des aimants naturels et/ou des champs électromagnétique constants. Ceci fut prédit par Earnshaw et confirmé par Braunbeck qui, en calculant l'énergie potentielle des champs induits, déduit qu'il n'existe pas de point à énergie minimale (puits de potentiel) et donc pas de point stable (Sangster, 2012, p. 36).

Ce point représente l'un des aspects importants relatifs à la lévitation magnétique et les applications de cette dernière, particulièrement dans le transport ferroviaire (trains MagLev). Malgré cet inconvénient, la technologie de lévitation magnétique a été adoptée pour les trains à très grande vitesse. La raison principale est la limite de vitesse que les trains conventionnels (à roues) peuvent atteindre qui est due à la résistance des joints de rails (Han et Kim, 2016, p. 1) et aux nuisances et bruits induits. La lévitation magnétique permet d'éliminer les frottements avec le rail (support) et donc permet d'envisager des vitesses largement supérieures à celles des systèmes à roues.

3.2 Fondements théoriques

La suspension d'un objet dans le contexte de la lévitation magnétique résulte de l'interaction de champs magnétiques entre des objets magnétiques (Han et Kim, 2016, p. 9).

Une charge q en mouvement à une vitesse \vec{v} produit un champ magnétique autour d'elle. La densité de flux du champ magnétique \vec{B} liée au champ magnétique par la relation $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ est défini, en un point de l'espace différent de la position de q , par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \vec{r}}{r^2} \quad (3.1)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique de l'air, \vec{r} est le vecteur position du point de l'espace par rapport à la position de q . Le module de cette densité de champ magnétique est alors :

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|q| v \cdot r \sin \phi}{r^2} \quad (3.2)$$

Avec ϕ l'angle entre la direction \vec{r} et la direction de déplacement de la charge \vec{v} .

Il est clair que l'amplitude du champ magnétique en un point est inversement proportionnelle à la distance entre ce point et la charge qui crée ce champ. Cela nous renvoie à la nature instable de la lévitation car, comme on le verra plus bas, la force électromagnétique est proportionnelle au champ magnétique à son origine.

Lorsque deux champs créés par deux sources entrent en interaction, on peut distinguer deux cas : lorsque les pôles magnétiques sont différents (nord-sud ou sud-nord) les lignes de flux du champ traversent les deux circuits des sources dans la même direction et on assiste à une *attraction*, dans le cas contraire (nord-nord et sud-sud) il se crée une *répulsion* alors que les lignes de champ se repoussent mutuellement.

3.2.1 Points d'équilibre

Si l'on désire réaliser la sustentation d'un objet grâce à l'influence d'un champ magnétique, on est amené à considérer la stabilité et l'existence d'un point d'équilibre. A première vue et en référence à l'expression (3.2) on peut déterminer que dans le cas général d'une

charge/particule soumise à un champ magnétique le point d'équilibre est atteint lorsque la particule est en contact avec le pôle le plus proche.

Ceci est tout aussi vrai dans le cas de la *suspension* d'un objet en dessous d'un aimant/électroaimant qui essaie d'arracher l'objet à la force de gravitation par attraction. En effet, le point d'équilibre où les deux forces agissant sur l'objet en flottaison (force du poids et force d'attraction) sont égales. Mais nous avons déjà vu que dans ce cas le minimum d'énergie est lorsque la distance entre l'objet et l'aimant est nulle. Alors pour maintenir l'objet en équilibre à une distance donnée de l'aimant, le système fournit une énergie magnétique maximale qui au-delà de ce point tend à s'annuler devant la force de gravitation (l'objet sort de l'influence de l'aimant et tombe). Le point d'équilibre est donc à maximum d'énergie et instable pour l'axe de translation verticale. Néanmoins la stabilité latérale est assurée intrinsèquement et donc le seul effort de contrôle est fourni pour maintenir le point d'équilibre vertical en dépit des perturbations (Sangster, 2012, p. 72).

Dans le cas de la *lévitation* on veut maintenir l'objet (magnétisé dans ce cas) en flottaison au-dessus d'un aimant/électroaimant en faisant appel à la force de répulsion entre les deux champs magnétiques établit par l'aimant et l'objet. Ce cas présente l'avantage qu'au point d'équilibre, l'énergie du système est à son minimum : lorsque l'objet s'éloigne de l'aimant (et de sa position désirée) la force de répulsion diminue et donc l'attraction de la gravité devient plus importante et tendra à ramener l'objet vers son point antérieur; si la perturbation pousse l'objet plus près de l'aimant, la force de répulsion devient plus importante que la gravité et ramène l'objet à sa position désirée. Cet aspect est important car il ne requiert pas de contrôle dynamique pour maintenir la position verticale de l'objet. Néanmoins, la stabilité latérale n'est pas assurée et l'objet est sur un « coussin » restreint duquel il peut tomber si il s'écarte latéralement de sa position d'équilibre (Sangster, 2012, p. 72).

Le choix de la méthode de sustentation détermine donc les outils de contrôle pour assurer un système stable : pour la suspension, il s'agit d'assurer la stabilité verticale en établissant un contrôle en boucle fermée qui agira sur l'intensité de la force d'attraction magnétique; dans le cas de la lévitation, il est possible de placer un système auxiliaire d'aimant pour ajuster la position latérale et assurer la stabilité.

Dans ce qui suit nous décrirons en détails le modèle de la suspension d'un objet (boule en acier) auquel nous appliquerons nos différentes lois de commande.

3.3 Modélisation du système de suspension magnétique

Nous avons présenté auparavant la suspension magnétique avec des termes généraux. Maintenant nous tirerons le modèle mathématique qui régit un tel système. La Figure 3-1 montre un schéma simplifié du système.

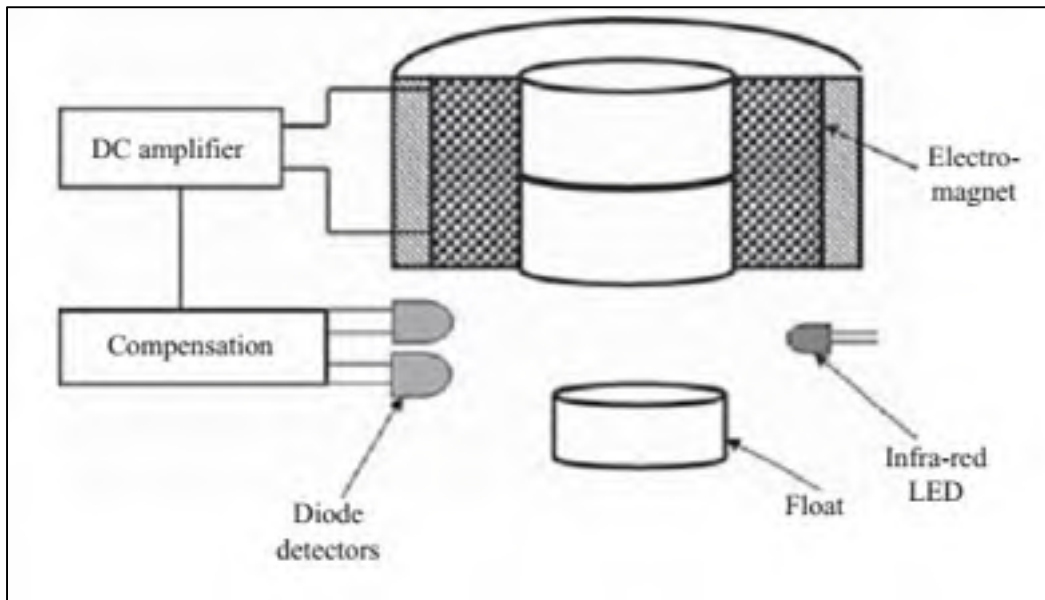


Figure 3-1 Suspension d'un objet métallique avec contrôle dynamique
tirée de (Sangster, 2012, p. 77)

L'électroaimant maintient l'objet en flottaison à une distance constante en corrigeant l'intensité du champ magnétique et ce en fonction de la compensation dictée par la différence entre la position désirée et la position actuelle transmise par le ou les détecteurs (infrarouge, à effet Hall,...etc.).

L'objet est soumis aux forces de la gravité et d'attraction magnétique. La loi fondamentale de la dynamique (Newton) appliquée à ce dernier s'exprime ainsi :

$$m\ddot{z} = -f_k + mg + F \quad (3.3)$$

Avec :

- z position relative de l'objet à l'électroaimant
- m masse de l'objet
- g accélération gravitationnelle
- F force d'attraction magnétique appliquée à l'objet
- k_f coefficient de viscosité de l'air.
- f_k force des frottements avec l'air $f_k = k_f \dot{z}$. Cette force est généralement négligée.

Au point d'équilibre l'accélération est nulle. Le circuit électrique est quant à lui régit par la loi de Kirchoff :

$$v = Ri + \frac{d(Li)}{dt} \quad (3.4)$$

La force F est déterminée en observant que cette dernière est la résultante de la variation de l'énergie magnétique stockée dans l'entrefer (air) notée E_m en fonction de la position de l'objet. Ou en d'autres termes :

$$F = \frac{\partial E_m}{\partial z} \quad (3.5)$$

Sachant que l'énergie magnétique du système peut être exprimée en fonction de la réluctance du système :

$$E_m = \frac{1}{2} Li^2 \quad (3.6)$$

Et la reluctance du système est fonction de la reluctance propre de l'électroaimant et de l'entrefer (air entre l'aimant et l'objet). Cette expression peut être déterminée expérimentalement. Nous reprenons ici l'expression obtenue dans (Sun et al., 2015, p. 819) :

$$L = L(z, L_0) = \frac{k_1 + k_2 L_0 + L_0 z}{k_2 + z} \quad (3.7)$$

En remplaçant (3.6) et (3.7) dans (3.5) on obtient l'expression :

$$F = \frac{\partial \left[\frac{1}{2} \frac{k_1 + k_2 L_0 + L_0 z}{k_2 + z} i^2 \right]}{\partial z} \quad (3.8)$$

On obtient alors :

$$F = \frac{i^2}{2} \frac{\partial \left[\frac{k_1 + k_2 L_0 + L_0 z}{k_2 + z} \right]}{\partial z} \quad (3.9)$$

$$F = -\frac{i^2}{2} \frac{k_1}{(k_2 + z)^2} \quad (3.10)$$

En remplaçant les expressions (3.10) et (3.7) dans les équations (3.3) et (3.4) respectivement, on obtient les nouvelles équations :

$$m\ddot{z} = -f_k + mg - \frac{i^2}{2} \frac{k_1}{(k_2 + z)^2} \quad (3.11)$$

$$v = Ri + \frac{d \left(\frac{k_1 + k_2 L_0 + L_0 z}{k_2 + z} i \right)}{dt} \quad (3.12)$$

Enfin on peut réécrire ces équations comme suit :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{1}{m} f_k + g - \frac{k_1}{2m} \frac{i^2}{(k_2 + z)^2} \quad (3.13)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{(k_2 + z)}{(k_1 + k_2 L_0 + L_0 z)} v + i \left[\frac{-R(k_2 + z)}{(k_1 + k_2 L_0 + L_0 z)} + \frac{k_1 \frac{dz}{dt}}{(k_2 + z)(k_1 + k_2 L_0 + L_0 z)} \right] \quad (3.14)$$

En reprenant les conventions suivantes adoptées dans (Sun et al., 2015) :

- $v = k_{driver} u$
- $\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k_1}}$
- $\alpha_0 = \frac{\sqrt{2}k_2}{\sqrt{k_1}}$

Et en posant les variables d'état comme suit :

- $x_1 = z$
- $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}$
- $x_3 = i$

On aura la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g - \frac{k_f}{m} x_2 - \frac{x_3^2}{m(\alpha_0 + \alpha_1 x_1)^2} \\ \dot{x}_3 = \frac{(k_2 + x_1)k_{driver}}{(k_1 + k_2 L_0 + L_0 x_1)} u + x_3 \left[\frac{-R(k_2 + x_1)}{(k_1 + k_2 L_0 + L_0 x_1)} + \frac{k_1 x_2}{(k_2 + x_1)(k_1 + k_2 L_0 + L_0 x_1)} \right] \end{cases} \quad (3.15)$$

Ce système est non linéaire. Pour pouvoir étudier et concevoir un compensateur quasi-linéaire tel que dans la méthode B nous devons d'abord linéariser ce système autour d'un point d'équilibre $(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0})$. On obtient le Jacobien suivant (Sun et al., 2015, p. 820) :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2\alpha_1 x_{3_0}^2}{m(\alpha_0 + \alpha_1 x_{1_0})^3} & -\frac{k_f}{m} & -\frac{2x_{3_0}}{m(\alpha_0 + \alpha_1 x_{1_0})^2} \\ 0 & \frac{k_1 x_{3_0}}{a_1 a_2} & \frac{-R a_1}{a_2} + \frac{k_1 x_{2_0}}{a_1 a_2} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Avec :

$$a_1 = k_2 + x_{1_0}$$

$$a_2 = k_1 + k_2 L_0 + L_0 x_{1_0}$$

On obtient donc un modèle linéarisé du système de lévitation magnétique tel que décrit précédemment. Ce modèle nous permettra d'étudier le comportement du système en boucle ouverte (sans compensation) et d'appliquer différentes commandes pour améliorer la stabilité et les performances de ce dernier. Enfin nous pourrons comparer les différentes méthodes et synthétiser une conclusion.

3.3.1 Comportement dynamique du système

Nous adoptons les valeurs caractéristiques du système ayant servi expérimentalement dans (Sun et al., 2015). Ces valeurs sont présentées dans le Tableau 3-1.

Tableau 3-1 Valeurs caractéristiques du système modélisé

$m(kg)$	0.01085	$L_0(H)$	0.1153	k_f	0
$g(m/s^2)$	9.80665	$k_1(Hm)$	4.3892×10^{-4}	k_{driver}	24.7
$R(\Omega)$	25.3	$k_2(m)$	0.0146		

Nous linéarisons le système précédemment décrit autour du point d'équilibre ($x_1 = 0.006$) qui nous donnent les valeurs (Sun et al., 2015, p. 820) :

$$x_{1_0} = 0.006 \text{ m}, x_{2_0} = 0, x_{3_0} = 0.4536, u_0 = 0.4647 \text{ et } k_f = 0$$

Notre système linéarisé est décrit par les équations matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 952.1384 & 0 & -43.2409 \\ 0 & 3.4344 & -185.203 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 180.8109 \end{bmatrix} u \quad (3.17)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]$$

La fonction de transfert associée est :

$$P = C(sI - A)^{-1}B = \frac{-7818}{s^3 + 185.2s^2 - 803.6s - 1.763 \times 10^5} \quad (3.18)$$

Les pôles de ce système en boucle ouverte sont : 30.5144 , -31.3431 , -184.3743

Donc le système comporte un pôle instable en (30.5144). On peut voir que le système est instable pour un compensateur identité, et en observant le lieu des pôles de la boucle fermée (rétroaction à retour unitaire) sur la Figure 3-3 on voit qu'il n'existe aucun gain pur qui peut stabiliser le système. En étudiant le diagramme de Nyquist du système sur la Figure 3-2 on voit bien que le diagramme polaire du système en boucle ouverte est dans le demi-plan positif, et que donc il n'y a aucun encerclement du point $(-1,0)$, alors que le système comporte un pôle instable.

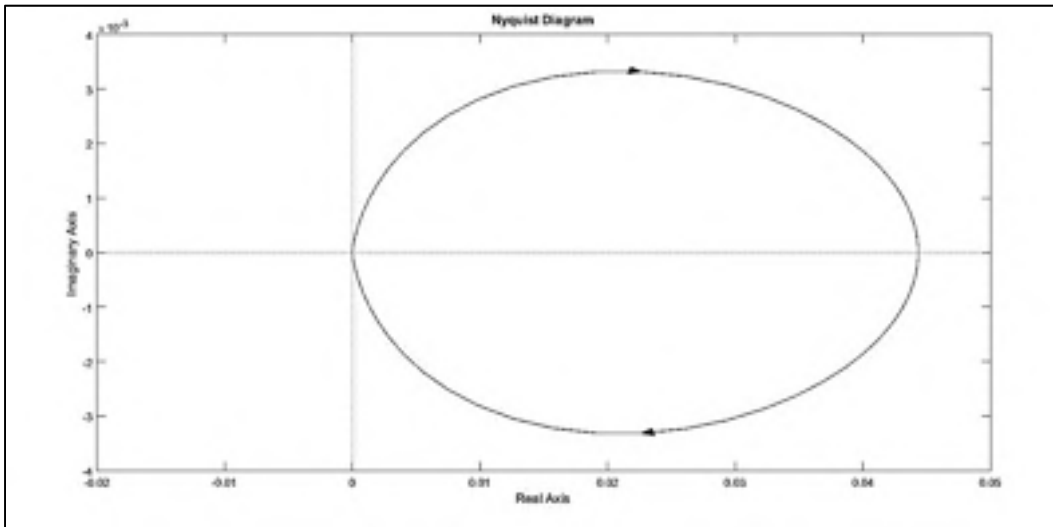


Figure 3-2 Lieu de Nyquist du système pour un compensateur identité.

Ceci nous confirme que le système est instable et qu'aucun gain ne peut amener la courbe à effectuer un encerclement dans le sens positif du point critique $(-1,0)$.

Nous vérifions la commandabilité et l'observabilité du système.

Commandabilité :

La matrice de commandabilité est construite comme suit :

$$\mathbb{C} = (B \quad AB \quad A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -7817,792 \\ 0 & -7817,792 & 1,44 \times 10^6 \\ 180,8 & -33484,16 & 6,17 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbb{C}) = 180,8 \times (-7817,792^2) = -1,1 \times 10^{10} \neq 0$$

Donc notre système est totalement commandable et il n'y a pas de nécessité de le décomposer en sous-systèmes commandables et non commandables.

Observabilité :

La matrice d'observabilité du système est donnée par :

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 952,1 & 0 & -43,24 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbb{O}) = -43,24$$

Donc le système est complètement observable.

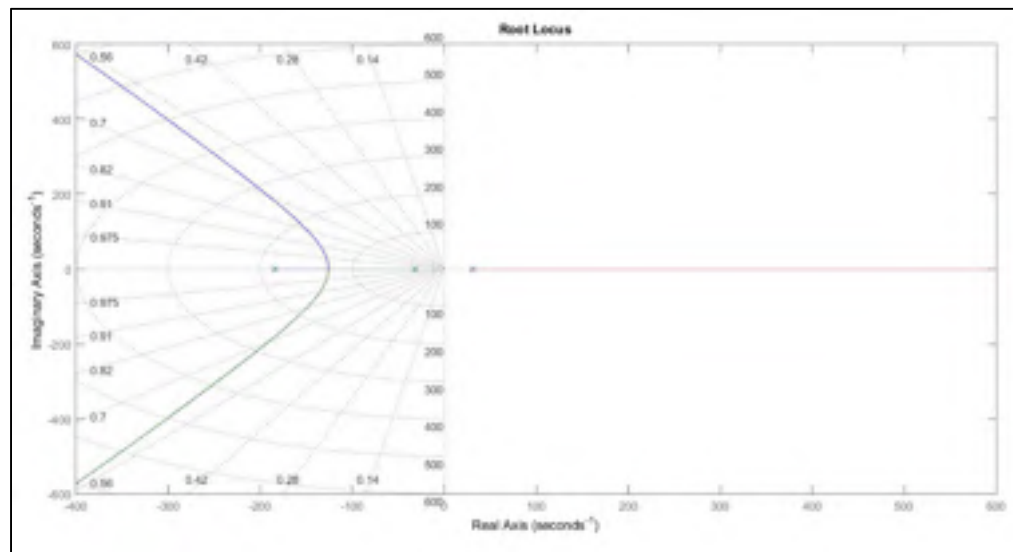


Figure 3-3 Lieu des pôles en boucle fermée du système

CHAPITRE 4

COMPENSATION DU SYSTÈME DE LEVITAION METHODE B ET AUTRES METHODES

4.1 Compensation du système

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le système de lévitation magnétique tel que décrit était instable, que ce soit en boucle ouverte ou bien en boucle de rétroaction à gain pur. Cela nous pousse à rechercher des méthodes de compensation dynamique qui permettent d'assurer la stabilité du système en boucle fermée et éventuellement d'améliorer les performances de ce dernier.

Nous commençons par appliquer la méthode B décrite dans la section 2.3 au système. En premier nous décrirons les éléments du compensateur et la logique de leur déduction en rapport à la fonction de transfert du système et à la méthodologie décrite précédemment. Nous ferons la synthèse d'un compensateur en appliquant la démarche décrite auparavant et nous vérifierons que ce compensateur répond aux spécifications de stabilité et performances. Nous comparerons les performances obtenues avec ce compensateur à celles qu'on obtient par un retour d'état à placement de pôles et un retour d'état optimal LQR.

4.2 Méthode B

Nous reprenons ici, pour des raisons pratiques, la description du système par variables d'état et par fonction de transfert tel que décrit par les équations (3.17) et (3.18).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 952.1384 & 0 & -43.2409 \\ 0 & 3.4344 & -185.203 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 180.8109 \end{bmatrix} u \quad (4.1)$$
$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$P(s) = \frac{-7818}{s^3 + 185.2s^2 - 803.6s - 1.763 \times 10^5} \quad (4.2)$$

Nous réécrivons la fonction de transfert de manière à mettre en évidence les pôles de cette dernière. On obtient ainsi :

$$P(s) = \frac{-7818}{(s + 184.4)(s + 31.34)(s - 30.51)} \quad (4.3)$$

On peut distinguer les deux parties de la fonction de transfert : stable à minimum de phase et instable. On les nommera respectivement P_1 et P_2 tel que :

$$P_1(s) = \frac{-7818}{(s + 184.4)(s + 31.34)} \quad (4.4)$$

$$P_2(s) = \frac{1}{(s - 30.51)} \quad (4.5)$$

Nous pouvons aussi vérifier que la fonction de transfert $P(s)$ possède la propriété d'atténuation. On le voit à travers le diagramme de Bode du module de $P(s)$ dans la Figure 4-1. La courbe $P(s)$ (bleue) est toujours au-dessus de la courbe de la fonction $\frac{10^3}{s^3}$ (rouge) et ce à partir de la fréquence 100 rad/s . On en déduit les valeurs suivantes : $c = 1000$, $q = 3$, $\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$.

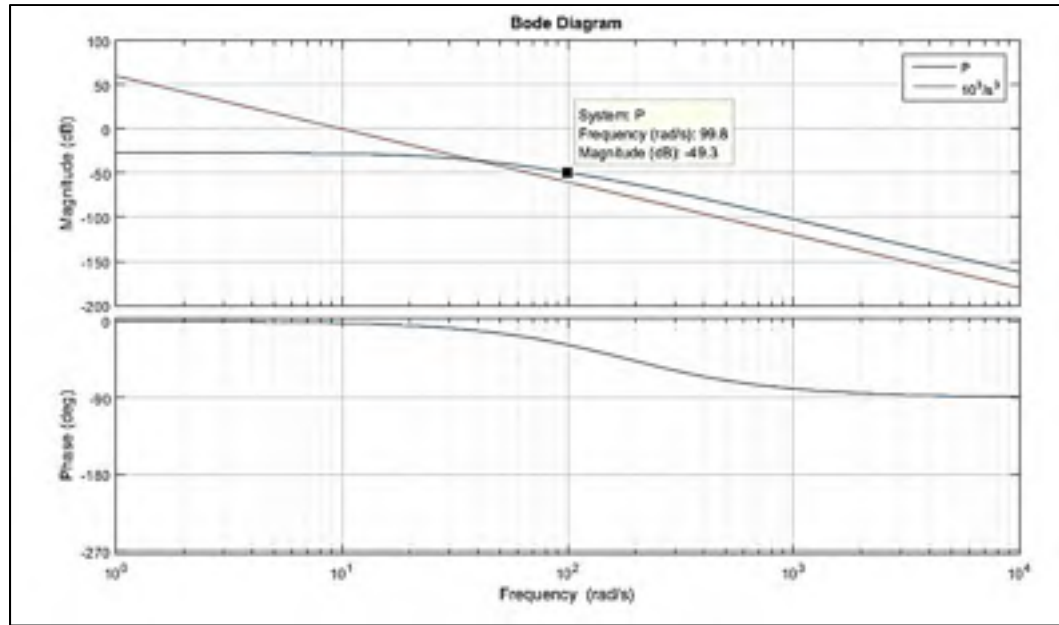


Figure 4-1 Propriété d'atténuation du système de lévitation

On définit alors d'après l'expression (2.17) la fonction H de telle sorte que :

$$H(s) = \frac{c'}{(s + s_0)^{q'}} P_1(s) = \frac{1}{(s + 100)} \frac{-7818}{(s + 184.4)(s + 31.34)} \quad (4.6)$$

La valeur de $q' = 1$ assure la stricte causalité de $C_B(s)$, et donc la réalisabilité de la compensation. Sachant que $k \geq q$ et $q = 3$, on aura l'ordre du compensateur $C_B(s)$ qui est : $1 + k - q' - 2 \geq 1$. Alors $q' \leq k - 2$. En prenant $k = 3$ on obtient $q' = 1$. La valeur de c' est choisie pour donner à $H(s)$ le même comportement que $P(s)$ en hautes fréquences (à partir de 100 rad/s). La valeur c' est satisfaisante. Comme on le voit sur la Figure 4-2 la fonction $H(s)$ construite en (4.6) à le même comportement que $P(s)$ en hautes fréquences.

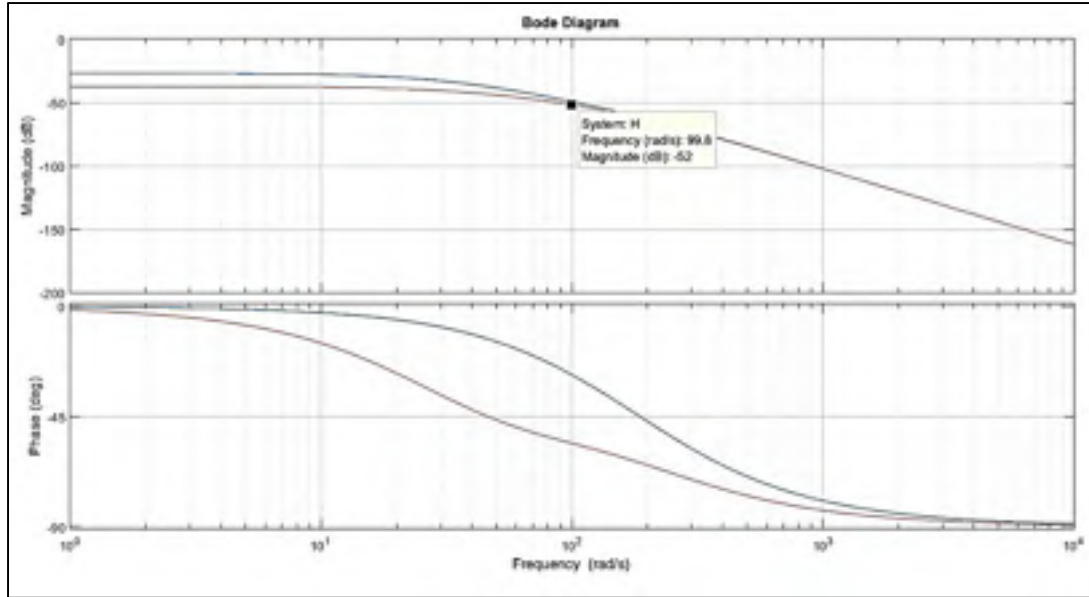


Figure 4-2 Comportement en hautes fréquences de P (bleu) et H (rouge)

4.2.1 Compensateur avec erreur statique :

Notre compensateur sera de la forme :

$$C_B(s) = H(s)^{-1}J(s) = \frac{(s + 100)(s + 184.4)(s + 31.34)}{-7818}J(s) \quad (4.7)$$

Sachant que $J(s)$ est de la forme :

$$J(s) = k_1 \underbrace{\frac{\omega_1}{s + \omega_1}}_{J_1} \underbrace{\frac{s + z}{s + p}}_{J_2} \underbrace{\left(\frac{\omega_2}{s + \omega_2}\right)^k}_{J_3}, \text{ tel que } k \geq q = 3 \quad (4.8)$$

On aura l'expression du compensateur C_B :

$$C_B(s) = k_1 \frac{(s + 100)(s + 184.4)(s + 31.34)}{-7818} \frac{\omega_1}{s + \omega_1} \frac{s + z}{s + p} \left(\frac{\omega_2}{s + \omega_2}\right)^3 \quad (4.9)$$

Le système en boucle ouverte avec le compensateur a la fonction de transfert suivante :

$$L(s) = P(s)C_B(s) = k_1 P_2(s + 100) \frac{\omega_1}{s + \omega_1} \frac{s + z}{s + p} \left(\frac{\omega_2}{s + \omega_2}\right)^3 \quad (4.10)$$

$$L(s) = k_1 \frac{(s + 100)}{(s - 30.51)} \frac{\omega_1}{s + \omega_1} \frac{s + z}{s + p} \left(\frac{\omega_2}{s + \omega_2}\right)^3 \quad (4.11)$$

$$L(s) = k_1 \frac{(s + 100)}{(s - 30.51)} \frac{1}{\frac{s}{\omega_1} + 1} \frac{s + z}{s + p} \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_2} + 1\right)^3} \quad (4.12)$$

Soit alors les fréquences définies comme suit :

- ω_a pour laquelle tous les pôles instables du système $P(s)$ appartiennent à la région $|s| \leq \omega_a$. On peut choisir $\omega_a = 40 \text{ rad/s}$ supérieure au plus grand pôle instable de P $30.51 < 40$
- ω_0 à partir de laquelle P et H adoptent le même comportement. On a vu auparavant que $\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$ (voir Figure 4-2)
- ω_1 est choisie pour être supérieure à la bande passante du système en boucle fermée. Sachant que, dans le cas d'un système du premier ordre, le temps de montée $t_r \approx \frac{0.35}{\omega_{BF}}$, tel que ω_{BF} est la bande passante du système en boucle fermée, nous pouvons prendre une valeur approximative de cette dernière en fixant un temps de montée désiré. Nous prendrons $t_r = 0.01 \text{ s}$ et donc $\omega_{BF} \approx \frac{0.35}{0.01} = 35 \text{ rad/s}$. On peut prendre alors $\omega_1 = 45 > 35$
- On définit $\omega_x \geq \max(\omega_1, \omega_0, \omega_a)$. On prendra $\omega_x = 120 \text{ rad/s}$.

Avec ces fréquences définies, on peut réécrire la fonction de transfert en boucle ouverte du système compensé, en omettant les circuits $J_2(s)$. On aura alors :

$$L(s) = k_1 \frac{(s + 100)}{(s - 30.51)} \frac{1}{\left(\frac{s}{45} + 1\right)} \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_2} + 1\right)^3} \quad (4.13)$$

Soit ω_p la fréquence de coupure de L , tel que $\omega_p \geq \omega_x$. Nous prenons $\omega_p = 200 \text{ rad}$.

Nous aurons alors à la fréquence $s = j\omega_p$:

$$L(j200) = k_1 \frac{(j200 + 100)}{(j200 - 30.51)} \frac{1}{\frac{j200}{45} + 1} \frac{1}{\left(\frac{j200}{\omega_2} + 1\right)^3} \quad (4.14)$$

Pour déterminer la marge de phase, nous exigeons $|L(j200)| = 1$, donc l'expression de k_1 :

$$k_1 = \frac{1}{\left| \frac{(j200 + 100)}{(j200 - 30.51)} \frac{1}{\frac{j200}{45} + 1} \frac{1}{\left(\frac{j200}{\omega_2} + 1\right)^3} \right|} \quad (4.15)$$

Il nous reste donc à déterminer ω_2 .

Nous savons qu'à la fréquence de coupure la phase de $L(s)$ est :

$$\arg \frac{j\omega_p + 100}{j\omega_p - 30.51} - \tan^{-1} \left(\frac{\omega_p}{\omega_1} \right) - k \tan^{-1} \left(\frac{\omega_p}{\omega_2} \right) \quad (4.16)$$

Nous désirons une marge de phase de 67° , donc une phase de -123° . Sachant que $k = 3$, $\omega_1 = 45 \text{ rad/s}$ et $\omega_p = 200 \text{ rad/s}$, nous résolvons l'équation à une variable et nous obtenons $\omega_2 = 2000$. En remplaçant cette valeur dans l'équation (4.15) on obtient la valeur de $k_1 = 4.1837$.

Nous pouvons donc reconstruire notre compensateur C_B en retrouvant la forme de J et ainsi déduire la boucle ouverte compensée L .

$$J(s) = 4.1837 \frac{45}{s + 45} \left(\frac{2000}{s + 2000} \right)^3 \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} C_B(s) &= 4.1837 \frac{(s + 100)(s + 184.4)(s + 31.34)}{-7818} \frac{45}{s + 45} \left(\frac{2000}{s + 2000} \right)^3 \\ &= -1.9265 \times 10^8 \frac{(s + 100)(s + 184.4)(s + 31.34)}{(s + 45)(s + 2000)^3} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sachant que $L(s) = P(s)C_B(s)$ on aura :

$$\begin{aligned} L(s) &= 1.5061 \times 10^{12} \frac{(s + 100)(s + 184.4)(s + 31.34)}{(s + 184.4)(s + 31.34)(s - 30.51)(s + 45)(s + 2000)^3} \\ &= 1.5061 \times 10^{12} \frac{(s + 100)}{(s - 30.51)(s + 45)(s + 2000)^3} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Le système est stable en boucle fermée comme on peut le constater sur la Figure 4-3. La marge de phase est de 50.3° , ce qui est très proche de notre spécification de synthèse. La marge de gain est de 18.6 dB ce qui est aussi satisfaisant d'un point de vue robustesse du système.

En ce qui concerne les performances temporelles, nous soumettons le système en boucle fermée à un échelon et on relève la réponse de ce dernier.

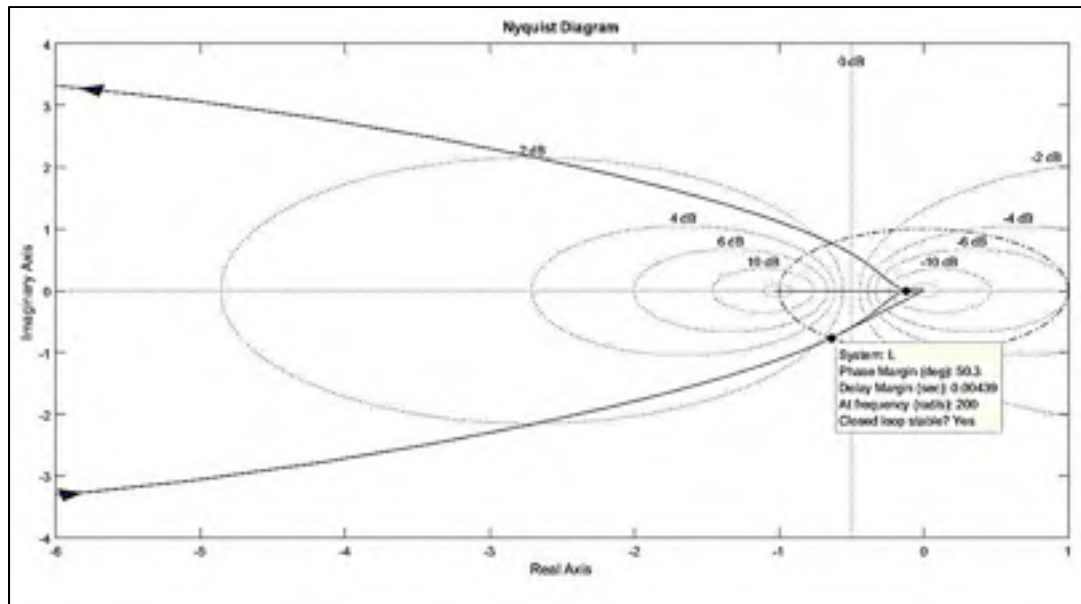


Figure 4-3 Diagramme de Nyquist du système compensé en boucle fermée

La Figure 4-4 montre cette réponse, on y voit que le temps de montée est de 5.52 ms ce qui est la moitié de notre spécification de départ (10 ms). Le temps de stabilisation est de 33.1 ms . Néanmoins, le système présente une erreur statique de l'ordre de 8% et aussi un dépassement de l'ordre de 20.6% . Ces derniers devront être éliminés à l'aide de la partie J_2 que nous avons omis jusqu'à maintenant, et éventuellement par l'ajout d'un préfiltre.

Enfin pour mesurer l'effort requis par le compensateur, nous examinons le diagramme de Bode de ce dernier comme illustré dans la Figure 4-5. On voit que la valeur pic du module de ce dernier est 91.4 dB , ce qui est relativement élevé.

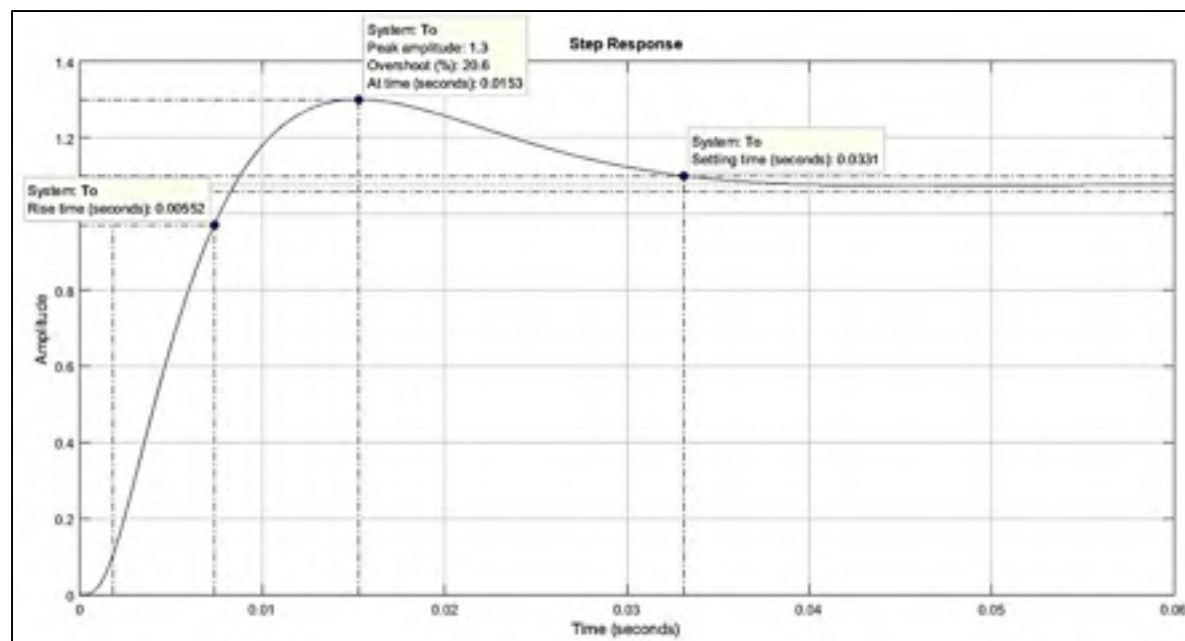


Figure 4-4 Réponse indicielle du système compensé en boucle fermée

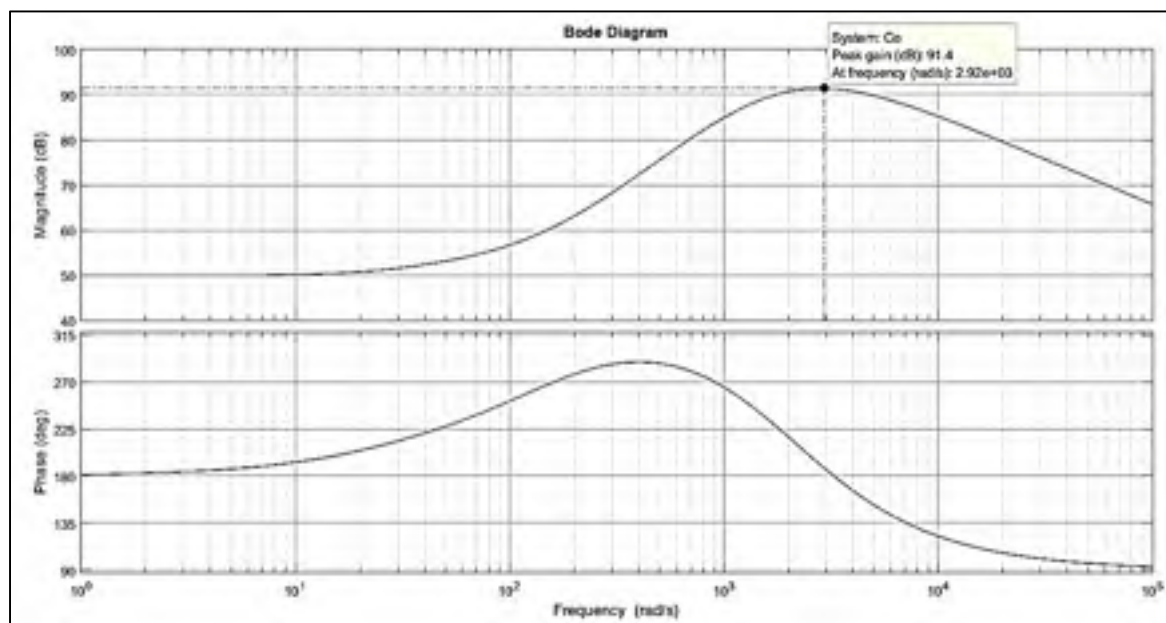


Figure 4-5 Diagramme de Bode du compensateur B

4.2.2 Élimination de l'erreur statique

Pour éliminer l'erreur statique, nous utilisons l'élément J_2 . On sait que si l'on désire une erreur statique nulle pour une entrée échelon, alors nous aurons :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1 \quad (4.20)$$

De par le théorème de la valeur finale on aura :

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 1 \quad (4.21)$$

La réponse à un échelon unitaire est décrite par :

$$Y(s) = T(s) \times \frac{1}{s} \quad (4.22)$$

Donc notre condition d'erreur statique nulle revient à :

$$\lim_{s \rightarrow 0} T(s) = 1 \quad (4.23)$$

Sachant que l'expression de la transmittance en prenant l'élément J_2 en compte est :

$$T(s) = \frac{\omega_2^3 \omega_1 k_1 (s + 100)(s + z)}{(s - 30.51)(s + \omega_1)(s + p)(s + \omega_2)^3 + \omega_2^3 \omega_1 k_1 (s + 100)(s + z)} \quad (4.24)$$

En observant le point $s = 0$, on aura :

$$T(0) = \frac{1}{1 + \frac{(-30.51)p}{100k_1z}} \quad (4.25)$$

Pour avoir $T(0) = 1$, on doit avoir :

$$\left| \frac{(-30.51)p}{100k_1z} \right| \ll 1 \quad (4.26)$$

Si on pose $z = Ap$, la condition se réécrit comme :

$$\left| \frac{(-30.51)}{100k_1A} \right| \ll 1 \Rightarrow A \gg \frac{31.51}{100k_1} \quad (4.27)$$

Donc on choisit $A = 100$. On essaie plusieurs valeurs en observant les effets sur la transmittance ainsi que sur la réponse temporelle. La valeur $p = 0.3$ correspond à l'élément $J_2(s) = \frac{s+30}{s+0.3}$.

L'expression du gain k_1 devient :

$$k_1 = \frac{1}{\left| \frac{(j200 + 100)}{(j200 - 30.51)} \frac{1}{\frac{j200}{45} + 1} \frac{(j200 + 30)}{(j200 + 0.3)} \frac{1}{\left(\frac{j200}{2000} + 1\right)^3} \right|} \quad (4.28)$$

$$k_1 = 4.1373$$

Ce qui nous donne :

$$J(s) = 4.1373 \frac{45}{s + 45} \frac{s + 30}{s + 0.3} \left(\frac{2000}{s + 2000} \right)^3 \quad (4.29)$$

$$C_B(s) = 4.1373 \frac{(s + 100)(s + 184.4)(s + 31.34)}{-7818} \frac{45}{s + 45} \frac{s + 30}{s + 0.3} \left(\frac{2000}{s + 2000} \right)^3 \quad (4.30)$$

$$= -1.9051 \times 10^8 \frac{(s + 100)(s + 184.4)(s + 31.34)(s + 30)}{(s + 45)(s + 0.3)(s + 2000)^3}$$

Et donc la boucle ouverte :

$$L(s) = 1.4894 \times 10^{12} \frac{(s + 100)(s + 30)(s + 184.4)(s + 31.34)}{(s + 184.4)(s + 31.34)(s - 30.51)(s + 45)(s + 0.3)(s + 2000)^3} \quad (4.31)$$

$$= 1.4894 \times 10^{12} \frac{(s + 100)(s + 30)}{(s - 30.51)(s + 45)(s + 0.3)(s + 2000)^3}$$

Le diagramme de Nyquist de la nouvelle boucle ouverte avec compensateur incluant l'élément $J_2(s)$ est décrit à la Figure 4-6

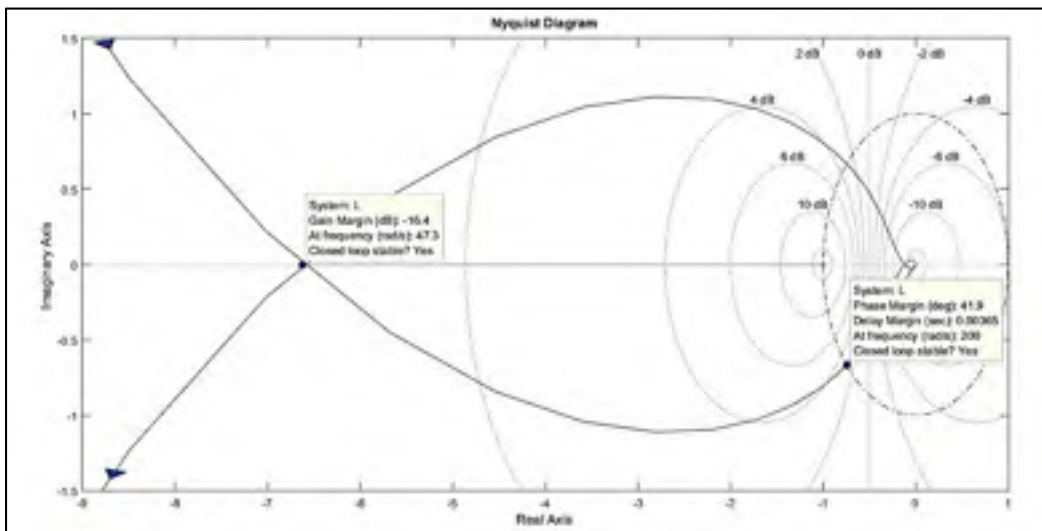


Figure 4-6 Boucle ouverte compensée incluant J2

On voit que la marge de phase a été réduite à 41.9 mais elle reste acceptable. La marge de gain est devenue quant à elle -16.4 dB. En somme, la stabilité et la robustesse du système ont été réduites par l'ajout de l'élément $J_2(s)$. La réponse temporelle de la nouvelle boucle fermée comparée à celle avant l'ajout de $J_2(s)$ est détaillée dans la Figure 4-7.

On voit bien que l'erreur statique a été éliminée grâce à l'introduction de J_2 . Cela a néanmoins augmenté le dépassement de presque le double, tandis que le temps de stabilisation est resté du même ordre de grandeur.

Élimination du dépassement temporel

Pour éliminer le dépassement temporel nous avons recours à une série de préfiltres qui élimineront le dépassement fréquentiel.

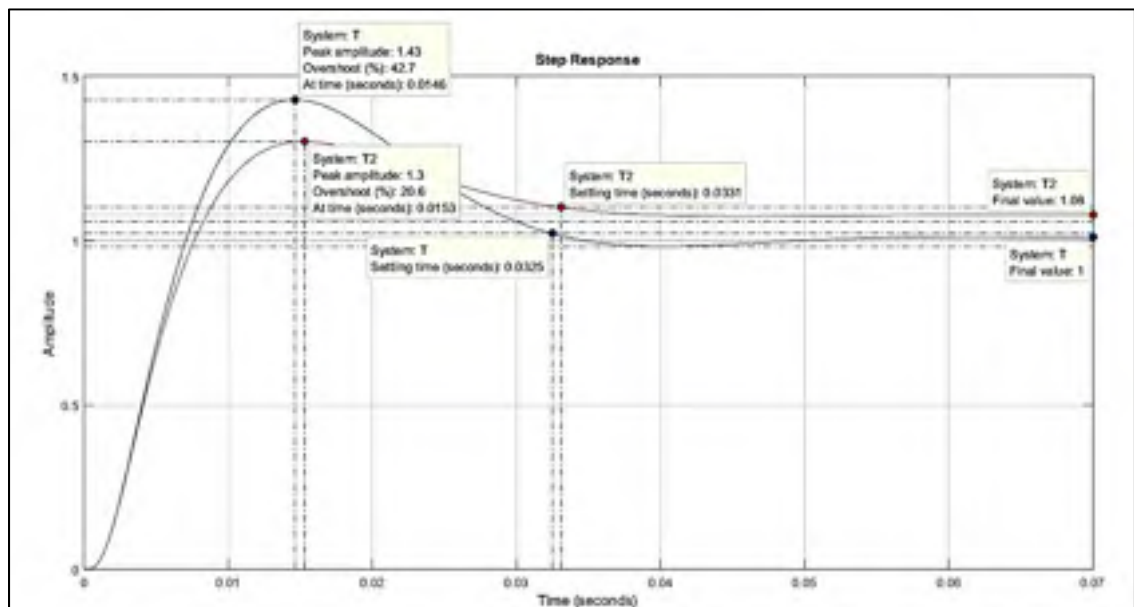


Figure 4-7 Réponse temporelle de la boucle fermée avec J_2 (bleu) et sans J_2 (rouge)

La zone d'action du préfiltre est choisie en examinant le diagramme de Bode de la transmittance (boucle fermée) montrée dans la Figure 4-8. On voit bien que celle-ci présente un dépassement fréquentiel de l'ordre de 4.3 dB à la fréquence 138 rad/s.

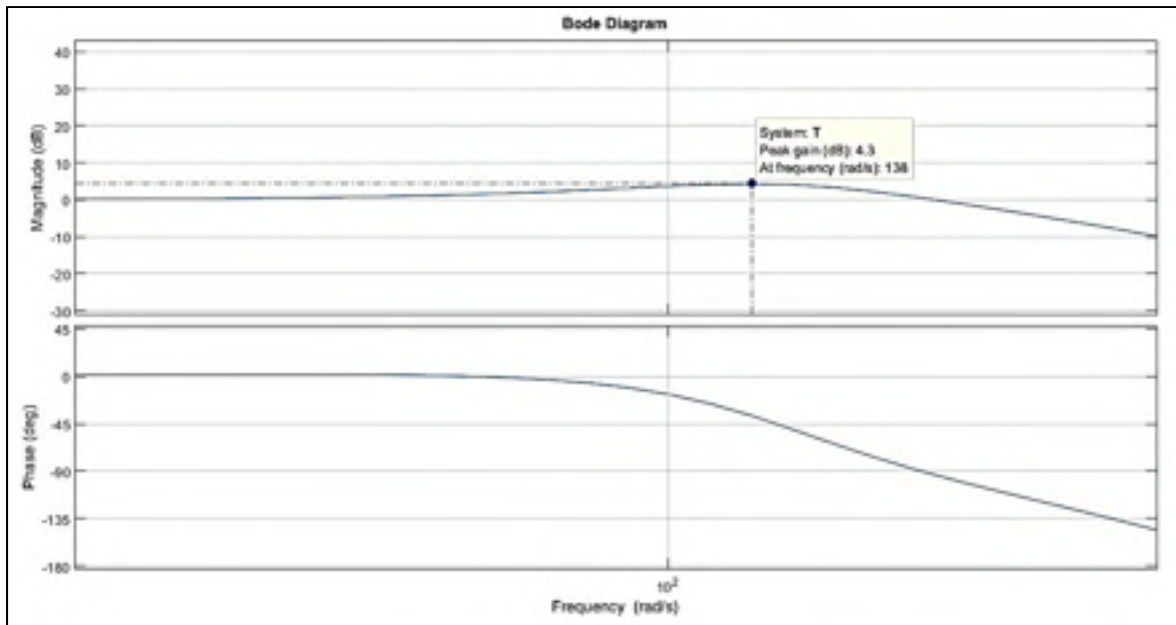


Figure 4-8 Dépassement fréquentiel de la transmittance (boucle fermée)

Notre but donc avec le préfiltre égalisateur est de réduire le dépassement en ce point et ce en appliquant un retard de phase (lag) centré sur la fréquence du dépassement.

Filtre du premier ordre

On choisit la structure de filtre passe-bas avec retard de phase autour de la fréquence 138 rad/s dont l'expression est obtenue après une recherche par itérations :

$$F(s) = \frac{\left(1 + \frac{s}{150}\right)}{\left(1 + \frac{s}{80}\right)} \quad (4.32)$$

La Figure 4-9, montre le diagramme de Bode de ce filtre.

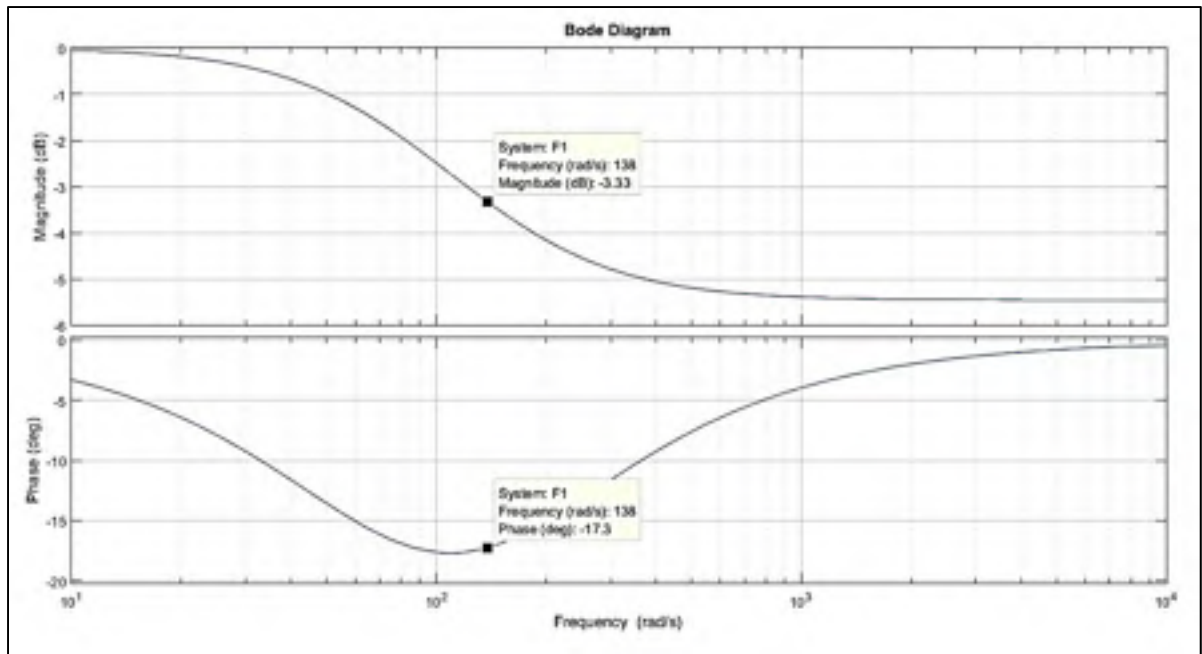


Figure 4-9 Diagramme de Bode du filtre F

Après application du préfiltre à la boucle fermée compensée, on obtient la réponse temporelle décrite à la Figure 4-10.

On voit que le dépassement temporel est passé de 42.7% à 15.1%.

Le temps de montée du système filtré est quant à lui augmenté, mais le temps de stabilisation ne change pas d'une manière importante grâce à la réduction du dépassement.

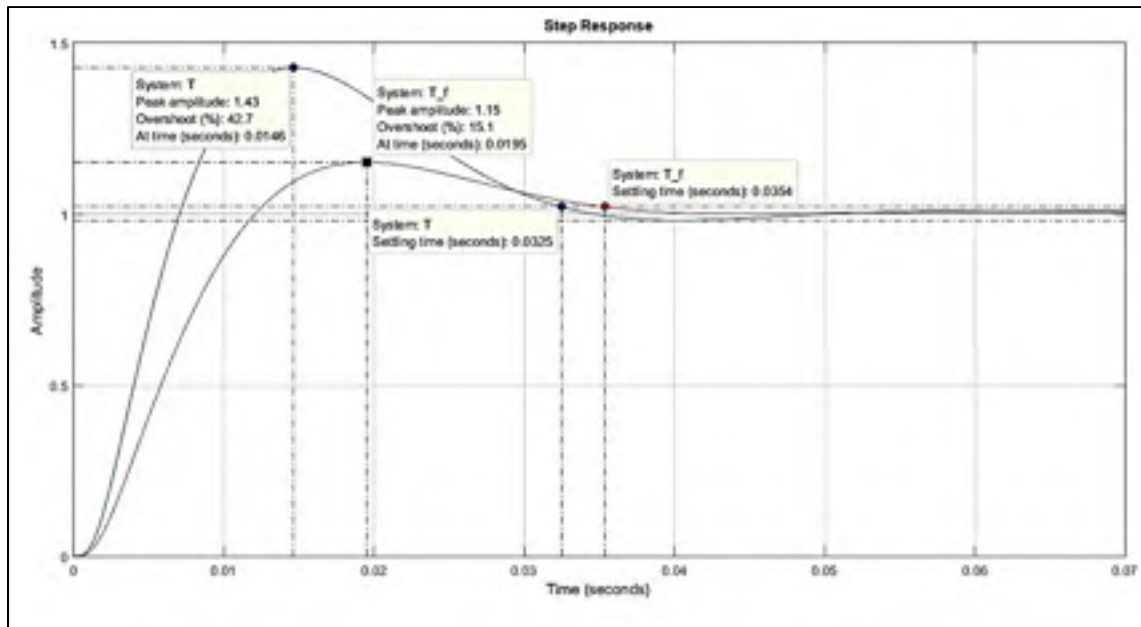


Figure 4-10 Effet du préfiltre sur la réponse temporelle en boucle fermée

Filtre du deuxième ordre

Dans le but de réduire d'avantage le dépassement temporel, nous introduisons un deuxième préfiltre, identique au premier, et en série avec ce dernier. Nous obtenons les résultats montrés dans la Figure 4-11 et Figure 4-12 . On voit que le dépassement fréquentiel est pratiquement réduit à zéro.

Le dépassement temporel est aussi grandement réduit jusqu'à une valeur très proche du zéro. En outre, le temps de stabilisation est réduit à 22.8 ms par rapport à la valeur non filtrée de 32.5 ms. Donc l'utilisation du préfiltre nous donne des résultats temporels excellents avec un temps de stabilisation réduit et un dépassement quasiment nul.

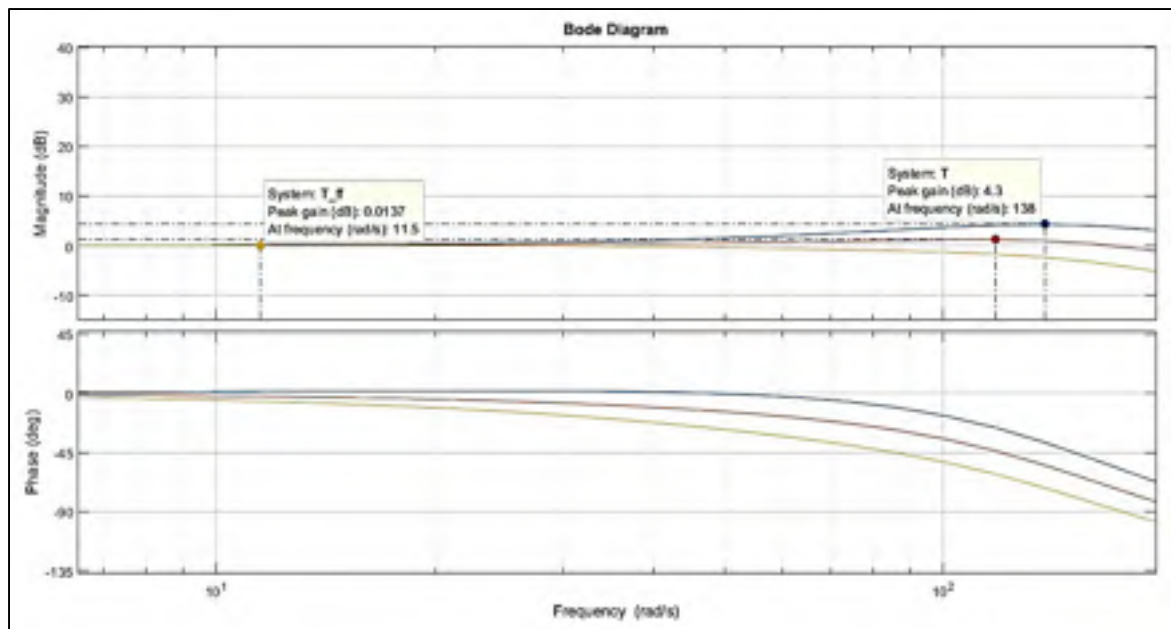


Figure 4-11 Effet du double préfiltre sur la réponse fréquentielle du système le système sans préfiltre en bleu, le système avec filtre de 1^{er} ordre en rouge et système avec préfiltre de second ordre en jaune.

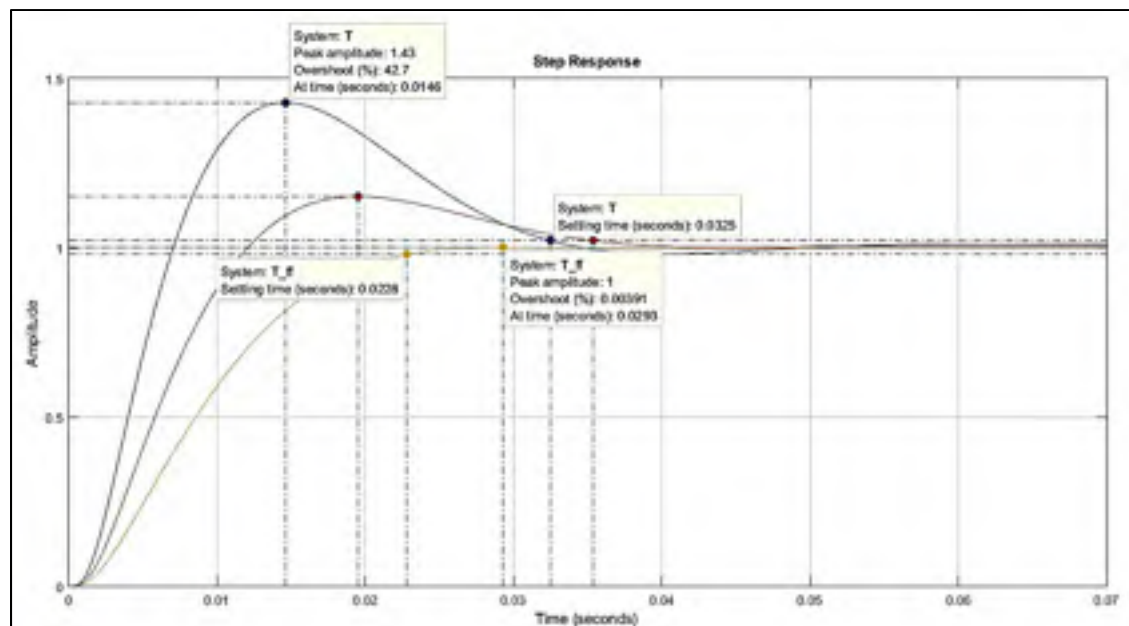


Figure 4-12 Effet du double préfiltre sur la réponse temporelle en boucle fermée

4.3 Retour d'état

Nous appliquons dans cette section différents schémas de compensation par retour d'état au système de lévitation magnétique en utilisant sa représentation d'état. Ces schémas permettront de stabiliser et éventuellement améliorer les performances du système, en prenant des critères de synthèse tels que l'énergie des signaux d'actuation, l'énergie totale du système...etc.

Le schéma général d'une représentation d'état d'un système linéaire à temps invariant (LTI) formé des matrices A , B et C est décrit à la Figure 4-13.

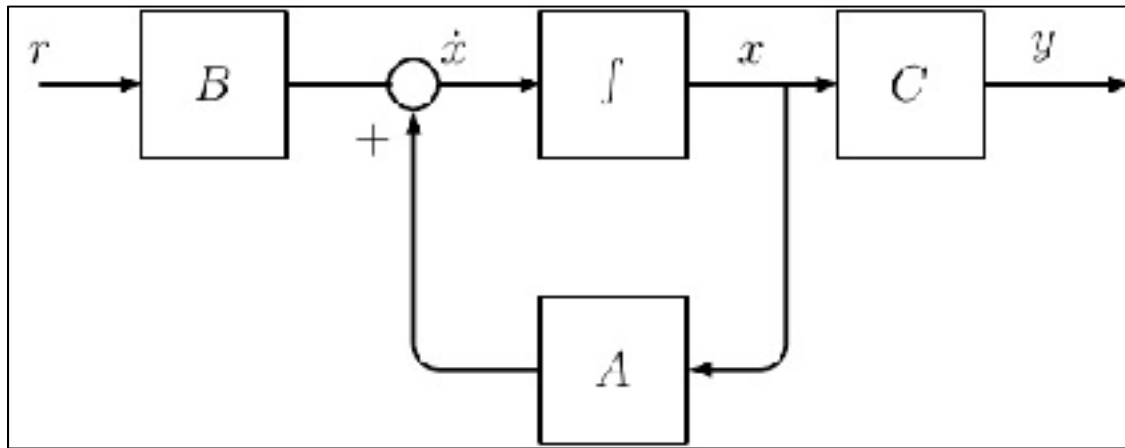


Figure 4-13 Représentation d'état d'un système LTI

Le principe de la compensation par retour d'état est d'introduire un gain sur le vecteur d'état en rétroaction de manière à modifier les pôles de la matrice d'état A . On peut voir à la Figure 4-14 le schéma d'un retour d'état appliqué à un système.

Le système résultant est donc décrit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = (A - BK)X + BK_r R \\ Y = CX \end{cases} \quad (4.33)$$

Si le gain K est choisi de manière à ce que $A - BK$ ait ses valeurs propres dans le demi-plan gauche ouvert, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. La loi de contrôle ainsi définie permet de réguler le système en l'amenant à zéro à partir d'un quelconque état initial (Belanger, 1995, p. 292). La fonction de transfert du système à retour d'état est décrite par :

$$\frac{Y}{R} = C(sI - (A - BK))^{-1}BK_r \quad (4.34)$$

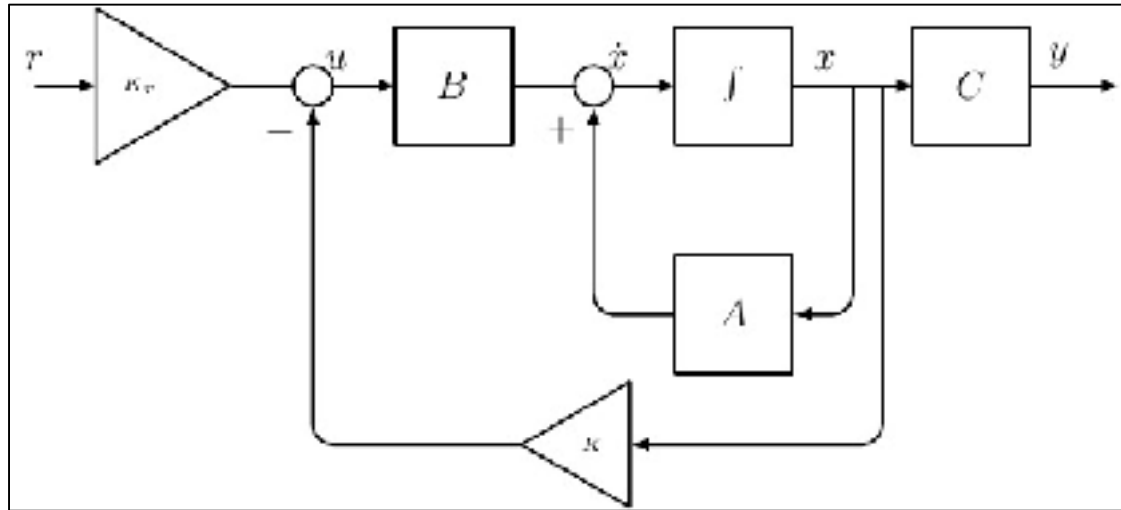


Figure 4-14 Schéma de retour d'état appliqué au système (suivi de référence)

Asservissement à une valeur référence :

Dans le cas de l'asservissement du système à une valeur référence désirée, le signal de contrôle est donné par :

$$U_r = K_r R - K X_r \quad (4.35)$$

Tel que U_r est le signal de commande pour amener le système de l'état zéro à l'état désirée et X_r est l'état désiré du système. Sachant qu'au régime permanent le système est décrit par :

$$\begin{cases} 0 = A X_r + B U_r \\ Y_r = C X_r \end{cases} \quad (4.36)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ Y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_r \\ U_r \end{bmatrix}$$

Le système étant linéaire, on peut en déduire les expressions :

$$\begin{aligned} X_r &= M_x Y_r \\ U_r &= M_u Y_r \end{aligned} \quad (4.37)$$

Tel que M_u et M_x sont des matrices de dimensions adéquates. En remplaçant ces deux valeurs dans (4.35) On obtient alors :

$$K_r R = (M_u + K M_x) Y_r \quad (4.38)$$

Et sachant qu'au point d'équilibre on a $Y_r = R$, alors on en déduit :

$$K_r = (M_u + K M_x) \quad (4.39)$$

Le choix du gain K est dicté par le critère de stabilité et les performances désirées du système. Il existe plusieurs méthodes pour le choix de ce gain, nous utiliserons les plus importantes pour comparer leurs performances avec la compensation B dans le cas du système de lévitation magnétique.

4.3.1 Placement de pôles

Le placement de pôles repose sur le théorème qui stipule que pour un système (A, B) commandable d'un ordre n donné et pour un polynôme unitaire $\lambda(s)$ d'ordre n il existe un gain unique K tel que le polynôme caractéristique du système $A - BK$ est $\lambda(s)$ (Belanger, 1995, p. 298). Sachant que l'équation caractéristique du système $A - BK$ est :

$$\begin{aligned} \det(sI - A + BK) &= \det[(sI - A) + BK] \\ &= \det[(sI - A)(I + (sI - A)^{-1}BK)] \\ &= \det(sI - A) \det(I + (sI - A)^{-1}BK) \\ &= \det(sI - A) [I + K(sI - A)^{-1}B] \end{aligned} \quad (4.40)$$

Et nous savons que :

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \quad (4.41)$$

On aura donc l'équation caractéristique de $A - BK$ qui est :

$$\det(sI - A) + K \text{adj}(sI - A) B \quad (4.42)$$

Le gain est déduit en égalisant les coefficients des deux côtés de l'équation suivante :

$$\lambda(s) = \det(sI - A) + K \text{adj}(sI - A) B \quad (4.43)$$

Il existe différents algorithmes pour le calcul du gain K pour le placement de pôles.

La fonction de transfert du système en boucle fermée (retour d'état) comporte les mêmes zéros de la boucle ouverte (système initial) et les pôles désirés par le retour d'état. La fonction de transfert est égale à l'unité au régime permanent ($s = 0$), on en déduit le gain statique de la fonction de transfert.

Considération dans le choix des pôles :

Dans la commande conventionnelle dans le domaine fréquentiel, on approxime le système par une fonction du deuxième ordre avec la paire de pôles dominants de manière à obtenir un facteur d'amortissement et une fréquence naturelle désirés. Rappelons qu'un système de deuxième ordre est écrit par la fonction de transfert :

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.44)$$

Tel que ζ est le facteur d'amortissement, ω_n la fréquence naturelle et la fréquence amortie du système est donnée par :

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (4.45)$$

Par contre, dans le placement de pôles dans l'espace d'état, on dispose de la possibilité de placer tous les pôles à des positions arbitraires.

A cette fin, la condition nécessaire est que le système soit complètement commandable, et nous supposons que les états du système sont tous accessibles (mesurables) (Ogata, 2010, p. 725).

Le choix du placement des pôles est souvent basé sur la méthode du lieu des racines, en choisissant une paire de pôles avec un facteur d'amortissement et une fréquence naturelle désirée, le reste des pôles est positionnée loin vers la gauche.

Mais si le placement des pôles loin de l'axe imaginaire permet d'obtenir un système compensé très rapide, les signaux de commande deviennent importants et risque de créer des non linéarités (saturations) et l'effet des perturbations peut mener le système loin du point de régulation.

Cette méthode est surtout efficace avec les systèmes de deuxième ordre, pour lesquels les caractéristiques sont directement décrites par l'emplacement des pôles. Dans le cas d'un système d'ordre supérieur, cette corrélation n'est pas évidente, et on a recours à la simulation pour déterminer les caractéristiques du système pour différentes valeurs du gain K .

Observateur d'état

Notre supposition que les états du système sont tous mesurables et accessibles n'est pas toujours validée. En effet, le plus souvent, nous n'avons accès qu'à un nombre limité de variables. Donc pour réaliser le contrôle par retour d'état, nous devons estimer, ou observer, les variables d'états à partir des variables mesurables, à savoir souvent la sortie du système est le signal de référence. Nous devons alors construire un observateur qui observera les variables non mesurables, et fournira au compensateur un vecteur estimé de l'état.

Pour un système commandable et observable, nous définissons un observateur d'état qui est un système qui reproduit d'une manière basique le modèle du système à commander, avec en terme additionnel l'erreur d'estimation. L'observateur est décrit par les équations :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_e(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \\ \hat{x} = I\hat{x} \end{cases} \quad (4.46)$$

Nous désirons que l'observateur nous fournisse une estimation qui tende vers l'état x . Nous voulons donc que l'erreur d'estimation $e = x - \hat{x}$ tende vers zéro. Or, on a :

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = A(x - \hat{x}) + K_e(Cx - C\hat{x}) \\ \dot{e} &= (A - K_e C)e \end{aligned} \quad (4.47)$$

Donc pour que l'erreur d'estimation tende vers zéro, il suffit que $(A - K_e C)$ soit asymptotiquement stable.

Le choix adéquat de K_e permet d'obtenir un observateur qui amène l'erreur d'estimation e à zéro plus rapidement que le système à retour d'état. La synthèse d'un observateur peut être considérée comme étant la solution d'un problème de placement de pôles pour le système dual décrit par les équations :

$$\begin{cases} \dot{z} = A^T z + C^T v \\ w = B^T z \end{cases} \quad (4.48)$$

Avec le signal de contrôle : $v = -Kz$.

$$\det(sI - (A^T - C^T K)) = \det(sI - (A - K^T C)) \quad (4.49)$$

On en déduit que :

$$K_e = K^T \quad (4.50)$$

Donc, ce système dual peut être amené à zéro pour la seule condition qu'il soit complètement commandable. Cette condition est la même que la totale observabilité du système initial.

La formule d'Ackermann permet de choisir K en fonction des valeurs propres désirées de $A - K^T C$.

Compensation par retour d'état avec observateur

Pour pouvoir concevoir un système de compensation par retour d'état en l'absence d'un accès direct aux variables d'état, nous construisons un contrôleur par retour d'état couplé à un observateur qui fournit une estimation de l'état.

On aura donc les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B(K_r r - K\hat{x}) \\ \dot{e} = (A - K_e C)e \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.51)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BK_r r - BK\hat{x} + BKe \\ \dot{e} = (A - K_e C)e \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.52)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - BK)\hat{x} + BKe + BK_r r \\ \dot{e} = (A - K_e C)e \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.53)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BK_r \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ e \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.54)$$

Le choix du gain K_e

Le choix des pôles de l'observateur sont souvent pris deux à cinq fois plus rapides que les pôles du compensateur pour amener rapidement l'erreur d'observation vers zéro (Ogata, 2010, p. 757). Cette considération doit être relativisée néanmoins dans le cas de la présence de bruits de mesure, où on cherchera à obtenir une réaction plus lente et une moindre bande passante et ainsi éviter un gain important sur les hautes fréquences (bruits, erreur de modélisation).

Fonction de transfert du compensateur

La fonction de transfert du compensateur incluant l'observateur peut être déduite en considérant le système matriciel de (4.46) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_e(y - \hat{y}) \\ u = -K\hat{x} + K_r r \end{cases} \quad (4.55)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - BK - K_e C)\hat{x} + K_e y + BK_r r \\ u = -K\hat{x} + K_r r \end{cases} \quad (4.56)$$

On obtient la relation entre la sortie y et le signal de commande u (Ogata, 2010, p. 761) :

$$u = -K(sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e y \quad (4.57)$$

Cette dernière correspond au compensateur de retour de sortie F_2 de la Figure 5-25.

Application au système de lévitation magnétique

Le système est décrit par les équations :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 952.1384 & 0 & -43.2409 \\ 0 & 3.4344 & -185.203 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 180.8109 \end{bmatrix} u \quad (4.58)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

On choisit d'étudier l'effet de différentes valeurs du gain sur la boucle fermée en choisissant de placer le pôle instable 30.51 à différentes positions stables sur l'axe réel.

Pour cela on construit un schéma de retour d'état avec observateur. Les pôles de l'observateur sont choisis pour être 5 fois plus rapides que le pôle le plus long du système à compenser (-31.34) donc de l'ordre de (-200).

On obtient le gain de l'observateur:

$$K_e = [-46.5713 \quad -360.0539 \quad -217.3217]^T \quad (4.59)$$

Pour fin de comparaison, on fixe les positions du pôle affecté par le retour d'état aux valeurs suivantes :

$$p_s = (-30, \quad -60, \quad -120, \quad -240) \quad (4.60)$$

On obtient les gains de retour d'état suivants :

$$K = [-52.09 \quad -1.67 \quad 0.33] \quad \|K\|_2 = 52.12 \quad (4.61)$$

$$K = [-77.92 \quad -2.50 \quad 0.50] \quad \|K\|_2 = 77.96 \quad (4.62)$$

$$K = [-129.88 \quad -4.15 \quad 0.83] \quad \|K\|_2 = 129.64 \quad (4.63)$$

$$K = [-232.88 \quad -7.46 \quad 1.50] \quad \|K\|_2 = 233.00 \quad (4.64)$$

On voit que, pour les différentes valeurs du pôle désiré, le système est stable et l'erreur statique est nulle, ce qui est prévisible pour le retour d'état. En outre, on note que les temps de stabilisation ($t_s = [0.196 \quad 0.154 \quad 0.140 \quad 0.135] s$) ne changent pas d'une manière importante. En effet, alors que le pôle dans le quatrième cas est 8 fois plus rapide (plus éloigné de l'axe imaginaire) le temps de stabilisation n'est que 31% plus petit.

On peut voir que le simple apport d'un seul pôle n'augmente pas la performance du système considérablement et que cette dernière tend à une limite et ce malgré l'augmentation de l'énergie consentie pour le retour d'état (gain K). La Figure 4-16 montre le signal de commande U pour les différentes valeurs du gain.

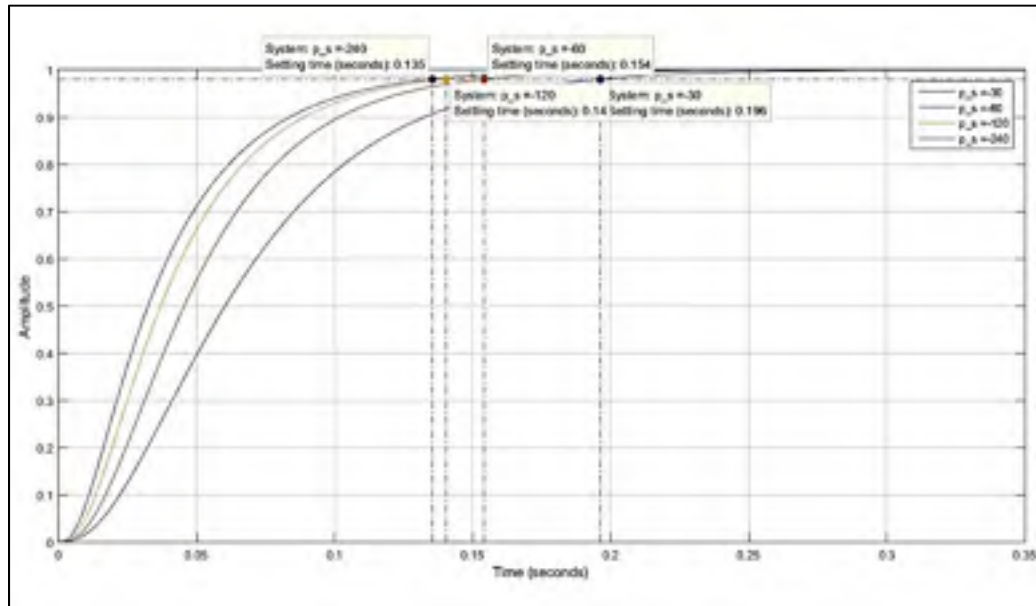


Figure 4-15 Réponse temporelle du système à retour d'état pour différents p_s

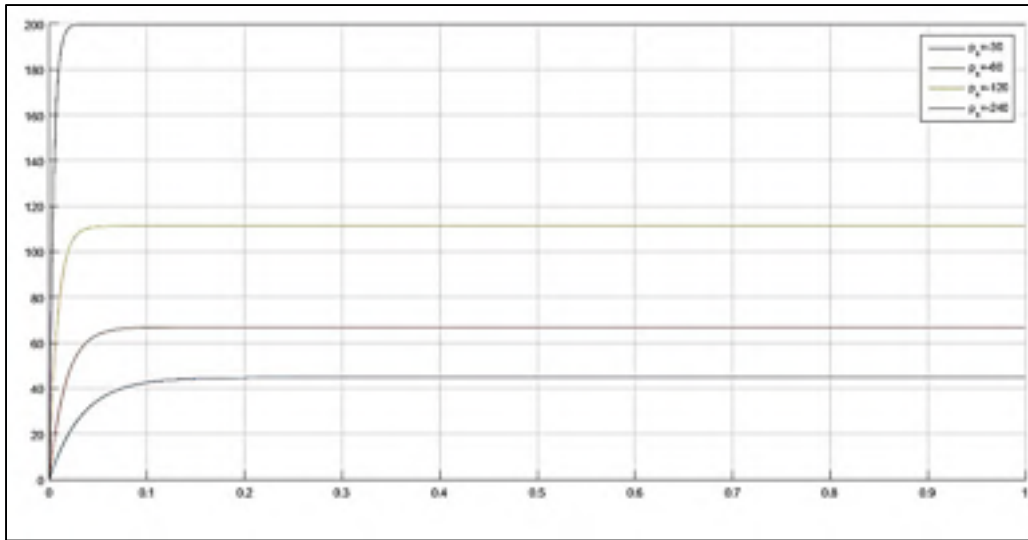


Figure 4-16 Signal de commande U pour différents p_s

4.3.2 Régulateur Quadratique Linéaire(LQR)

Nous avons vu précédemment que la synthèse d'un compensateur est guidée par des soucis de stabilité et de performances. Nous avons considéré l'importance de la capacité de suivi de consigne ainsi que le coût en énergie du système de contrôle.

Ces deux aspects sont utilisés comme facteurs de synthèse du régulateur quadratique linéaire. Celui-ci repose sur la même architecture de retour d'état vue précédemment, où le gain K est déterminé en résolvant un problème d'optimisation.

Considérons le système représenté par les équations suivantes, la dépendance dans le temps des vecteurs X et U étant omise par souci de simplicité:

$$\begin{cases} \dot{X} = (A - BK)X \\ Y = CX \end{cases} \quad (4.65)$$

Tel que :

$$U = -KX \quad (4.66)$$

Nous désirons minimiser la fonction coût :

$$J = \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt \quad (4.67)$$

La matrice Q est hermitienne définie positive (ou semi-définie positive) et R est une matrice hermitienne définie positive. Le premier terme de l'intégrale représente la pénalité appliquée à l'état du système (X), et le second terme, la pénalité à l'énergie de contrôle (U). Les matrices Q et R déterminent l'importance accordée respectivement à l'erreur de suivi de référence et à l'énergie de contrôle.

En remplaçant (4.66) dans (4.67) on obtient :

$$J = \int_0^{\infty} (X^T Q X + X^T K^T R K X) dt \quad (4.68)$$

$$J = \int_0^{\infty} X^T (Q + K^T R K) X dt$$

On pose :

$$X^T (Q + K^T R K) X = -\frac{d}{dt} (X^T P X) \quad (4.69)$$

On aura l'égalité :

$$X^T (Q + K^T R K) X = -X^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)] X \quad (4.70)$$

Par identification, on déduit :

$$-(Q + K^T R K) = (A - BK)^T P + P(A - BK) \quad (4.71)$$

Si la matrice $(A - BK)$ est stable alors il existe au moins une matrice P définie positive qui satisfait l'équation (4.69) et si on résout l'équation en trouvant une matrice P , symétrique définie positive, alors la matrice $(A - BK)$ est stable (Ogata, 2010, p. 794).

Pour déterminer le gain du compensateur de retour d'état qui nous permet d'obtenir la solution stabilisante, nous posons :

$$R = T^T T \quad (4.72)$$

Où T est une matrice inversible. On obtient alors :

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) + Q + K^T T^T T K = 0 \quad (4.73)$$

On réécrit cela sous la forme :

$$A^T P + P A + [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - P^T B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (4.74)$$

La minimisation de J se réduit à la minimisation par rapport à K (Ogata, 2010, p. 795) de :

$$X[TK - (T^T)^{-1}B^T P]^T[TK - (T^T)^{-1}B^T P]X^T \quad (4.75)$$

Cela nous donne le gain :

$$K = R^{-1}B^T P \quad (4.76)$$

Et l'équation (4.73) devient l'équation matricielle réduite de Riccati :

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (4.77)$$

Donc la synthèse du compensateur LQR repose sur la résolution de l'équation de Riccati. En obtenant la matrice P , nous nous assurons que la matrice $(A - BK)$ est stable. En remplaçant la matrice P ainsi trouvée dans l'expression (4.76) on trouve le gain optimal K . Donc pour chaque paire (Q, R) il existe un gain optimal unique K . En assignant des valeurs différentes à Q et R on peut exercer plus de pénalité sur l'un ou l'autre des paramètres.

Application au système de lévitation magnétique

On reprend la représentation du système dans l'espace d'état décrit dans (4.58). Pour observer l'effet des deux pondérations Q et R , On va paramétrer de la manière suivante :

$$R = 1 \quad (4.78)$$

$$Q = q_i C^T C \quad (4.79)$$

Tel que : $q = [10 \quad 100 \quad 1000 \quad 10000]$, q_i sont des facteurs de pondération scalaires.

On obtient les gains de retour suivants :

$$K = [-52.78 \quad -1.69 \quad 0.34] \quad \|K\|_2 = 52.80 \quad (4.80)$$

$$K = [-54.83 \quad -1.73 \quad 0.34] \quad \|K\|_2 = 54.85 \quad (4.81)$$

$$K = [-70.05 \quad -2.00 \quad 0.39] \quad \|K\|_2 = 70.08 \quad (4.82)$$

$$K = [-137.32 \quad -3.03 \quad 0.56] \quad \|K\|_2 = 137.35 \quad (4.83)$$

La réponse temporelle du système en boucle fermée avec les différents gains est donnée dans la Figure 4-17.

On voit que pour des valeurs de Q importantes on a un gain plus important (jusqu'à 2.5 fois plus grand) qui se traduit par une réponse plus rapide (temps de montée, temps de stabilisation). En effet le temps de stabilisation devient plus petit de presque le même ordre (2.5 fois). On note toutefois un dépassement de 2.29% qui reste toutefois acceptable.

On peut en tirer comme conclusion qu'une valeur importante du paramètre Q a pour effet de poser une plus grande pénalité sur l'erreur de l'état et de ramener le système plus rapidement vers la référence. Cela impose un plus grand gain et donc une énergie de contrôle plus grande. La Figure 4-17 montre le signal de commande pour différentes valeurs de Q .

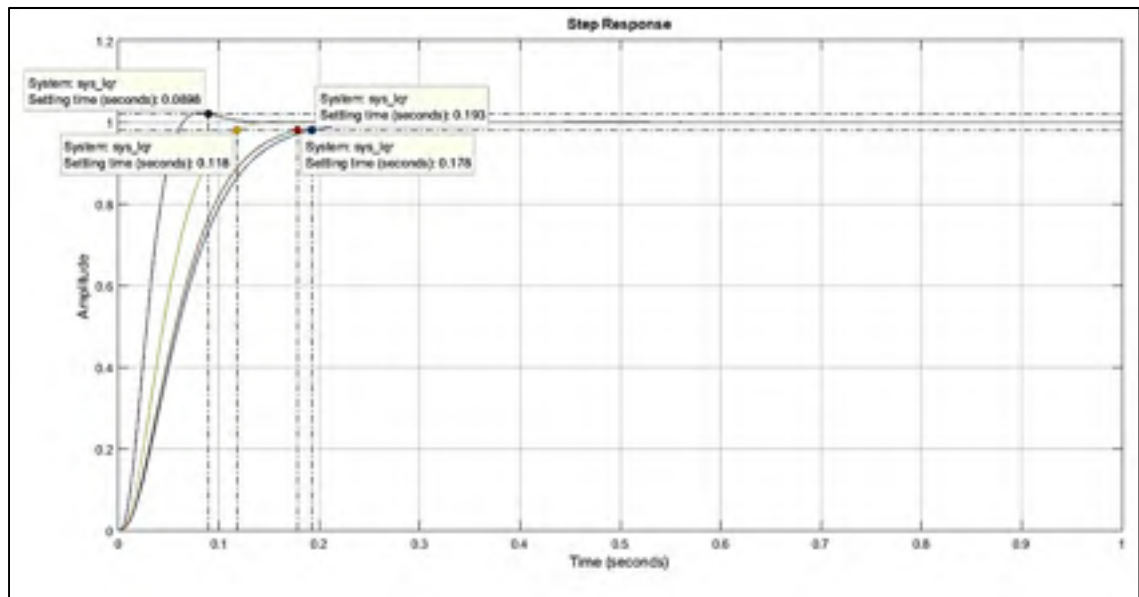


Figure 4-17 Réponse temporelle avec différentes valeurs de Q

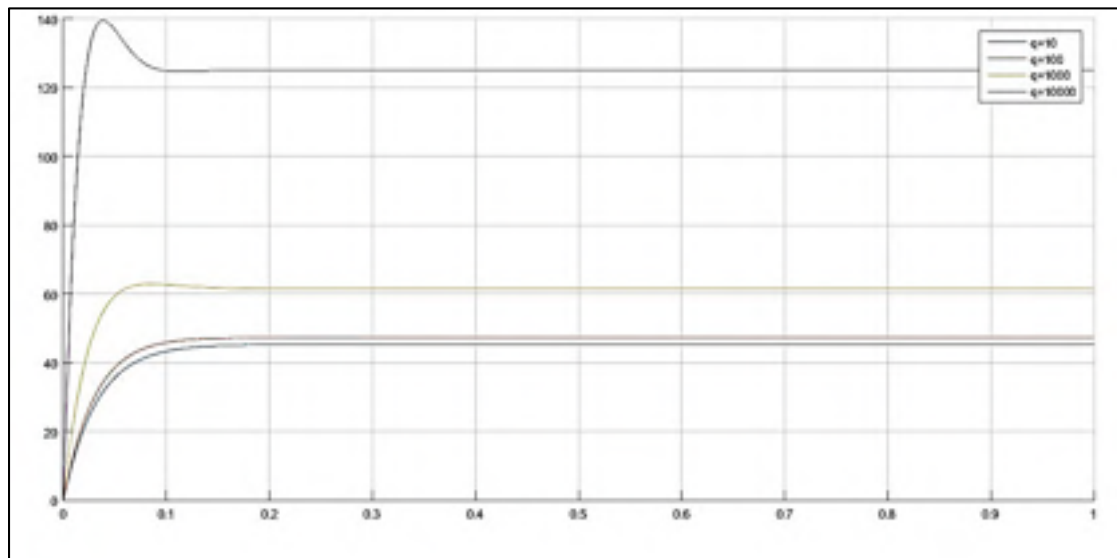


Figure 4-18 Signal de contrôle U pour différentes valeurs de Q

Nous faisons maintenant varier le paramètre R et nous fixons Q tel que :

$$R = r \quad (4.84)$$

$$Q = C^T C \quad (4.85)$$

Et $r = [10 \quad 100 \quad 1000 \quad 10000]$

On obtient les gains de retour suivants :

$$K = [-52.54 \quad -1.68 \quad 0.33] \quad \|K\|_2 = 811.68 \quad (4.86)$$

$$K = [-52.54 \quad -1.68 \quad 0.33] \quad \|K\|_2 = 811.68 \quad (4.87)$$

$$K = [-52.54 \quad -1.68 \quad 0.33] \quad \|K\|_2 = 811.68 \quad (4.88)$$

$$K = [-52.54 \quad -1.68 \quad 0.33] \quad \|K\|_2 = 811.68 \quad (4.89)$$

On peut voir à la Figure 4-19 que la pénalité sur le signal U fait que le gain est quasiment constant et que la réponse temporelle est elle aussi inchangée. On peut en déduire que le paramètre R agit comme un facteur d'inertie qui tend à maintenir le système dans une zone spécifique tandis que la paramètre Q influence le comportement du système en l'amenant à des niveau d'énergie supérieurs et des réponses temporelles plus rapides.

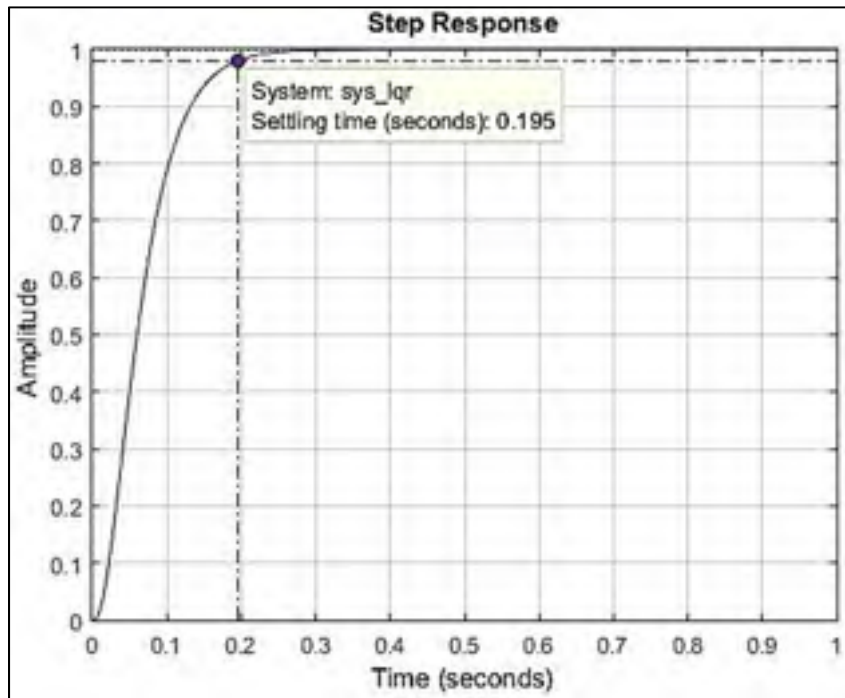


Figure 4-19 Réponse temporelle pour différentes valeur de R

Nous faisons varier le paramètre Q pour différentes valeurs de R comme suit :

$$R = r_i \quad (4.90)$$

$$Q = q_i \cdot C^T C \quad (4.91)$$

Tel que : $q = [1 \quad 100 \quad 10000]$ et $r = [1 \quad 10 \quad 100]$.

On observe alors la réponse temporelle.

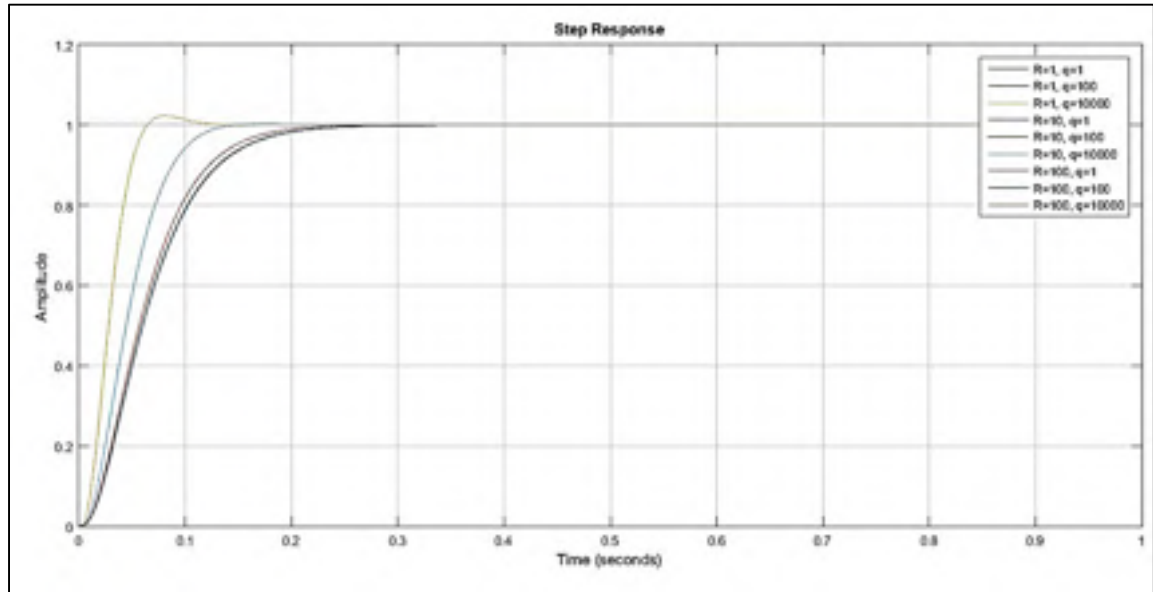


Figure 4-20 Réponses temporelles pour différentes valeurs de R et Q

On obtient les temps de stabilisations suivants :

Tableau 4-1 Temps de stabilisations pour différentes valeurs de R et Q

$R \backslash Q$	1	100	10000
1	0.1943	0.1784	0.0898
10	0.1945	0.1927	0.1180
100	0.1945	0.1943	0.1748

On voit que la variation du temps de stabilisation en fonction de la valeur de Q s'estampe avec l'augmentation de R . On peut voir l'effet sur la norme du signal de commande :

Tableau 4-2 Norme du signal de commande pour différents R et Q

$R \backslash Q$	1	100	10000

1	0.8073×10^3	0.8560×10^3	5.6097×10^3
10	0.8117×10^3	0.8123×10^3	1.1995×10^3
100	0.8117×10^3	0.8073×10^3	0.8560×10^3

Le niveau d'énergie est quant à lui considérablement réduit avec l'augmentation de la pénalité sur le signal U .

4.4 Comparaison des différentes méthodes de compensation

Les performances du compensateur B sont nettement meilleures que la compensation par retour d'état. En effet on peut voir la comparaison des performances des trois compensateurs dans le tableau.

Tableau 4-3 Comparaison entre les différentes méthodes de compensation

	Compensation B	Placement de pôles ($p_s = -240$)	LQR $R = 1, Q = 1000C^T C$
t_m	0.0145	0.0728	0.0708
t_s	0.0228	0.9005	0.1180
$D_{(\%)}$	0.0039	0	0.2514
MG	-16.4	∞	∞
MP	41.86°	$\geq 68^\circ$	$\geq 68^\circ$

CHAPITRE 5

COMPENSATION PAR DOUBLE BOUCLE

5.1 Commande à boucles multiples

La commande par retour de sortie est un concept qui est apparu très tôt dans l'histoire de la commande. Des systèmes de boucle fermée à retour de sortie ont été réalisés dans l'antiquité déjà et ont prouvé l'efficacité de cette méthode dans la réduction des erreurs et des perturbations. Il est alors naturel de se poser la question de l'efficacité de l'agrégation de retours de sortie successifs sur le système. La réponse à cette question n'est pas évidente mais nous montrons dans la prochaine section que si certaines conditions sont assurées, la commande à boucles multiples devient possible. La littérature en effet nous montre que les systèmes à boucles multiples sont utiles et utilisés dans différentes situations.

La première utilisation d'un système à retour de sortie à boucles multiples existe dans la nature. En effet, comme l'expliquent (Venkatesh, Bhartiya et Ruhela, 2004), la bactérie intestinale *Escherichia coli* utilise un schéma à retour de sortie à triple boucle pour assurer le maintien du niveau de tryptophane à une valeur stable et d'une manière robuste dans un contexte d'environnement changeant.

On retrouve aussi une utilisation prépondérante des systèmes de retour de sortie à boucle multiples dans la commande à modulation de largeur d'impulsion (MLI) de redresseurs-onduleurs (VSI et VSC) (Abdel-Rahim et Quaicoe, 1996; Shih-Liang et al., 1997; Yao et al., 2007). Dans ces systèmes de commande, une boucle intérieure régule le courant de ligne pour qu'il épouse une forme voulue, souvent pour corriger les effets de charges non linéaires, tandis que la boucle extérieure assure que le voltage est maintenu stable et d'une forme sinusoïdale. L'une des utilisations de la commande à boucles multiples est la commande d'éolienne à travers la recherche du point maximal de puissance (MPPT) (Li et al., 2012; Li, Haskew et Xu, 2010) où une boucle interne contrôle le courant du rotor (et donc le couple) de manière à

poursuivre le point de fonctionnement optimal, et une boucle extérieure maintient la tension du stator en phase avec le réseau.

L'intérêt de l'utilisation de boucles multiples est la séparation de deux objectifs dans la commande du système. Il peut s'agir d'assurer la stabilité dans un étage et les performances dans l'étage supérieur, ou de réguler une variable interne à une valeur désirée pour faciliter la commande de la variable externe. La séparation des choix des deux boucles, qui est assuré si certaines conditions sont remplies, permet au concepteur d'étudier les deux facettes du problème séparément et d'optimiser la compensation pour chacun d'eux.

Nous voulons donc connaître la condition pour pouvoir implanter une commande à multiple boucles. Nous donnons une réponse à cette question dans ce qui suit.

5.2 Problème de stabilisation et amélioration des performances :

On a vu que la synthèse d'un compensateur adéquat doit répondre à des critères de stabilité et de performance. Ainsi, nous désirons que le système compensé soit stable avec des marges de stabilité confortables qui garantiront le comportement stable en dépit des incertitudes sur le modèle utilisé. D'un autre côté, nous voulons que le système présente des performances désirées : rapidité, suivi de référence, consommation d'énergie.

Jusqu'à maintenant le compensateur utilisé répondait aux deux critères de conception simultanément. Nous nous posons la question :

Peut-on traiter les deux aspects de la compensation, à savoir stabilisation et amélioration des performances, séparément en utilisant une commande à deux étages?

Si nous établissons que le choix d'un étage compensateur stabilisateur est indépendant de l'étage d'amélioration de performance et n'influe pas sur ce dernier, alors nous pouvons choisir une méthode adéquate pour stabiliser notre système et, ayant obtenu un système stable, construire un compensateur en deuxième étage dont le seul but est d'améliorer les performances (réduction de la sensibilité, rapidité de réponse, suivi de référence...etc.).

Dans ce qui suit, P , Q et F représentent des opérateurs qui dans le domaine fréquentiel sont représentés par les fonctions de transfert $P(s)$, $Q(s)$ et $F(s)$ respectivement. Pour plus de

simplicité, les fonctions de transfert dans ce chapitre, à moins d'être explicitement décrites, seront représentées par leurs opérateurs désignés.

Système stable

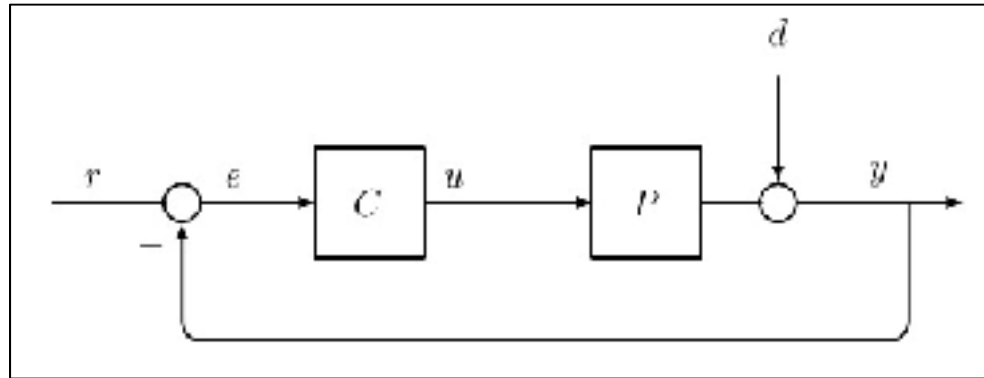


Figure 5-1 Retour de sortie avec compensateur C

Considérons le système P strictement causal et stable, soumis à une boucle de retour de sortie, avec un compensateur C causal, pas forcément stable, tel que dans la figure Figure 5-1. Il peut être démontré (Zames, 1981, p. 305) que pour tout retour de sortie (dont la fonction de transfert en boucle fermée est stable) le schéma de la Figure 5-1 peut être reformulé selon un *schéma de modèle de référence* tel que :

$$Q = C(I + PC)^{-1} \quad (5.1)$$

$$C = Q(I - PQ)^{-1} \quad (5.2)$$

$$y = PQr + (I - PQ)d \quad (5.3)$$

Sachant que Q est un compensateur stable et strictement causal. La stabilité dépend donc de Q et la sensibilité dépend de l'approximation de l'inverse de P par Q , c'est-à-dire la minimisation de la norme de $(I - PQ)$. Ce faisant, la relation entrée sortie devient PQ qui est l'approximation de l'identité. Notons qu'il s'en suit que le compensateur C est stable. La Figure 5-2 montre le schéma de modèle de référence.

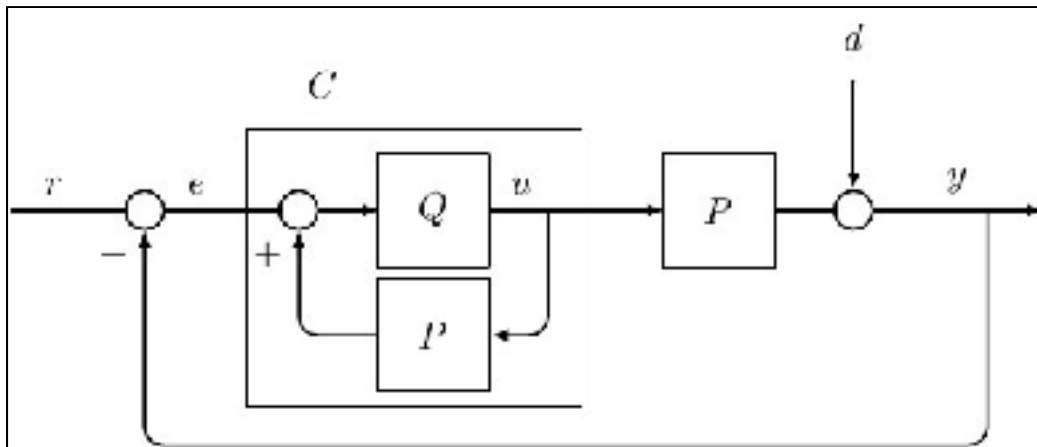


Figure 5-2 Schéma équivalent du modèle de référence

Nous pouvons donc, pour tous les compensateurs de la forme $C = Q(I - PQ)^{-1}$ avec Q stable, concentrer notre synthèse sur l'amélioration des performances sachant que tous les retours de sortie à base de ces compensateurs produiront une boucle fermée stable.

Nous savons donc que pour un système stable, nous pouvons synthétiser un compensateur avec des critères de performance et de sensibilité sans se soucier de perdre la stabilité de la boucle fermée, pour peu que le compensateur soit paramétré selon les équations (5.1) et (5.2). Mais qu'en est-il d'un système instable?

Système instable

Soit P_0 un système instable qui peut être stabilisé par un compensateur C_0 tel que dans la Figure 5-3. Le système stabilisé ainsi est $P_1 = P_0(I + C_0P_0)^{-1}$ et la perturbation stabilisée est $d = (I + PC_0)^{-1}d_0$.

Nous pouvons donc introduire le système stabilisé dans le schéma de modèle référence et choisir Q , causal et stable, de manière à obtenir un compensateur F , et donc une boucle fermée, qui répond à des critères de performances sachant que la boucle fermée sera forcément stable.

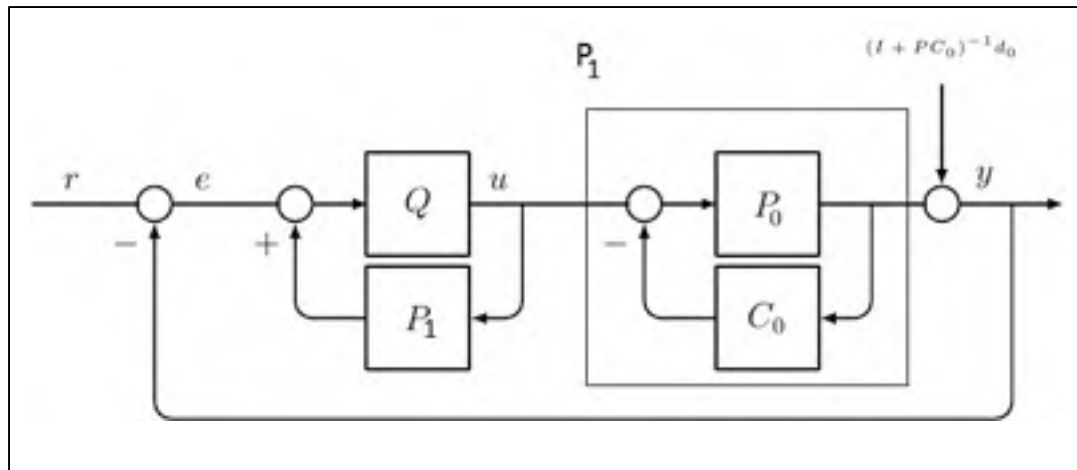


Figure 5-3 Système stabilisé par C_0 dans le schéma de modèle de référence

Nous posons la question relative au compensateurs C_0 et Q : peuvent-ils être synthétisés indépendamment et arbitrairement ?

Il est démontré dans (Zames, 1981) que tout schéma de retour de sortie à boucle fermée stable dont le compensateur est stable est équivalent à un schéma à double boucle avec :

1. un compensateur, stable, choisi arbitrairement et qui stabilise le système
2. un compensateur selon le schéma de modèle référence paramétré par le choix indépendant de Q .

Nous pouvons donc tirer la conclusion que nous pouvons concevoir un schéma de commande à double boucle en choisissant arbitrairement une boucle de stabilisation interne et un compensateur en boucle externe pour améliorer les performances.

Nous posons l'hypothèse pour un tel schéma comme suit :

1. un compensateur par retour d'état qui stabilise le système instable et qui est lui-même stable par définition.
2. le compensateur B (C_B) en boucle externe pour minimiser la sensibilité du système stabilisé et améliorer ses performances.

La Figure 5-4 montre les schémas de cette commande à double boucle. On peut noter que les deux compensateurs des boucles interne et externe remplissent les conditions énoncées plus haut : les deux compensateurs sont eux-mêmes stables et les boucles fermées formées par chacun sont stables.

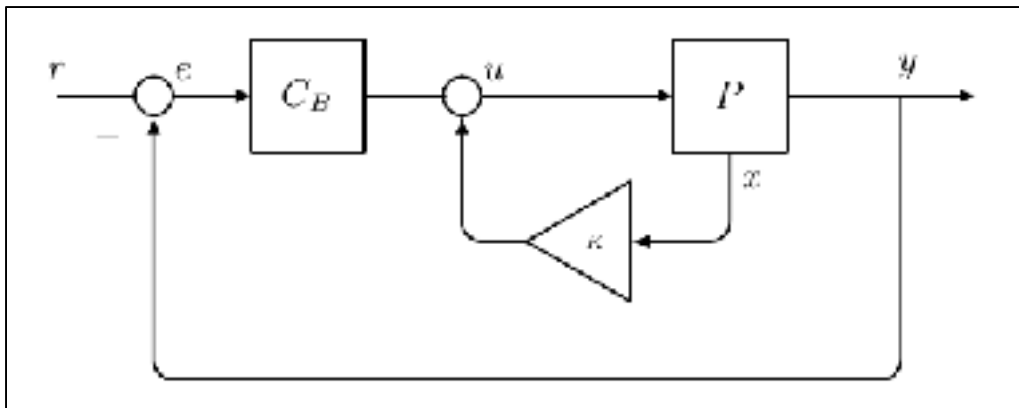


Figure 5-4 Schéma de commande à double boucle proposé

Nous étudierons la faisabilité, les avantages et les inconvénients de ce schéma de commande.

5.3 Stabilité entrée-sortie et stabilité interne du schéma à double boucle :

Comme nous l'avons vu dans la section 2.1, un schéma de commande à retour de sortie doit assurer la stabilité entrée-sortie de la boucle fermée, .i.e. pour un signal d'entrée borné la sortie de la boucle fermée doit être bornée. En outre, la boucle fermée doit garantir la stabilité interne, à savoir que tous les signaux internes du schéma de commande doivent être bornés pour une entrée bornée.

Dans le cas du schéma proposé de commande par double boucle, il s'agit de s'assurer que les compensateurs, synthétisés pour stabiliser et améliorer les performances de la boucle fermée, assurent la stabilité interne aussi. Donc, nous considérons les conditions sur les compensateurs des deux boucles pour assurer cette stabilité.

Nous savons de (Zames, 1981) qu'un système P qui peut être stabilisé, séparément, par les compensateurs C_1 et C_2 (schémas 1 et 2 dans la Figure 5-5), qui sont eux-mêmes stables, peut être stabilisé par un compensateur $C_{12} = C_2 - C_1$ (schéma 3) placé en boucle externe autour du retour de sortie par C_1 et que ce schéma est équivalent à la compensation par C_2 (schéma 2). Donc les conditions pour la stabilité interne et entrée-sortie du schéma à double boucle (schéma 3) sont :

- Les boucles fermées formées par le compensateur C_1 , de la boucle interne, et par C_2 , boucle fermée finale, sont stables.
 - Les compensateurs C_1 et C_2 sont stables.
- Il est à noter que le compensateur C_{12} n'a pas à être forcément stable.

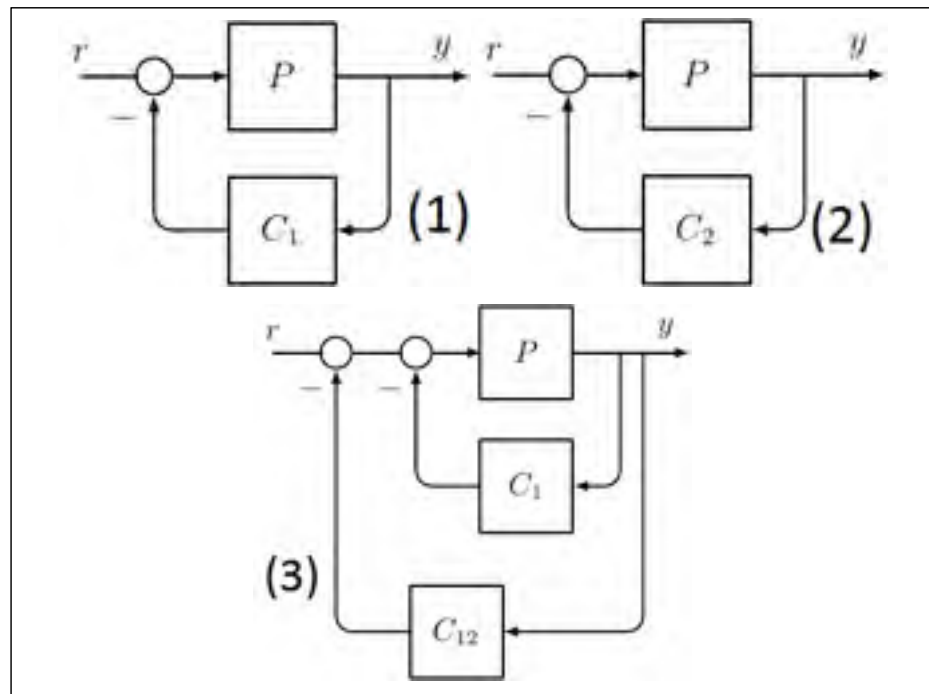


Figure 5-5 Équivalence des boucles de retour

Ceci peut être reformulé selon (Zames, 1981, p. 307) comme suit :

Tout schéma de retour de sortie qui forme une boucle fermée stable est équivalent à un schéma à double boucle composé de : a) un compensateur C_1 stable, choisi arbitrairement, qui stabilise le système par retour de sortie suivi de b) un compensateur C_{12} qui assure une boucle fermée stable en entrée sortie et qui n'est pas forcément stable selon le schéma de modèle de référence. On peut donc en déduire que dans le cas du schéma à double boucle que nous proposons ici, les conditions sont :

- Le compensateur par retour de sortie équivalent au retour d'état doit être stable
- Le système en boucle fermée final doit être stable entrée-sortie.

Notre synthèse des compensateurs du schéma à double boucle doit donc prendre en considération ces points.

5.4 Synthèse des compensateurs :

La construction des deux étages du schéma sont indépendants l'un de l'autre si on respecte les conditions énumérées dans la section précédente. Dans ce qui suit nous considérons ce cas et nous procédons à la synthèse des paramètres des compensateurs qui répondent à nos critères de stabilité et de performances.

5.4.1 Premier étage - boucle de retour d'état :

L'objectif de cet étage est la stabilisation du système instable par modification des valeurs propres du système en boucle fermée. Le schéma est identique à celui étudié dans la section 4.3, à savoir un retour d'état avec observateur qui est paramétré par les deux gains K_e , gain de l'observateur, et K , le gain du retour d'état.

Comme le choix de la construction de cet étage n'influe pratiquement pas sur les considérations de performances assurées par le deuxième étage (compensateur B), nous considérons un choix arbitraire du gain K . Le gain de l'observateur K_e sera pris de façon à avoir des pôles de l'observateur au moins 5 fois plus rapides que ceux du système.

Nous reprenons ci-dessous les équations du système en boucle fermée avec compensateur-observateur.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BK_r \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.4)$$

Nous optons initialement pour un gain K établi par LQR afin d'assurer une stabilisation avec une pénalité importante sur le signal de commande. Les performances du système stabilisé (pénalité sur l'état x) n'étant pas importantes à ce stade, nous désirons avoir la commande la moins coûteuse en termes d'énergie.

Nous avons vu dans la section 4.3.2 que des valeurs élevées du paramètre R permettent d'obtenir des signaux de commande moins importants. Donc nous choisissons les valeurs :

$$\begin{cases} R = 1000 \\ Q = C^T C \end{cases} \quad (5.5)$$

Ces valeurs nous donnent un gain de retour d'état :

$$K = [-52,54 \quad -1,68 \quad 0,34] \quad (5.6)$$

Avec les pôles de la boucle fermée : (-184.3743 -30.5150 -31.3425)

Nous choisissons un gain d'observateur K_e pour placer les pôles de l'observateur $(A - K_e C)$ à des valeurs 5 fois plus rapides que le système en boucle fermée .i.e. (-200 -200 -200).

Cela nous donne le gain :

$$K_e = [-46.5713 \quad -360.0539 \quad -217.3217] \quad (5.7)$$

Nous avons donc les paramètres qui permettent de stabiliser le système en fournissant le moins d'énergie. Pour assurer la stabilité du schéma à double boucle, nous devons nous assurer que le compensateur à retour de sortie équivalent au retour d'état est stable. Nous avons déjà vu que les pôles du compensateur-observateur sont les valeurs propres de $A - BK - K_e C$. Ces valeurs choisies pour les gains K et K_e sont :

$$-1022.7, -304.0 \pm j236.3$$

Les parties réelles sont toutes négatives donc notre compensateur du premier étage est stable.

Nous passons à la construction du deuxième étage, à savoir le compensateur B pour systèmes stables en deuxième boucle. Nous allons revenir au choix du gain K si des critères d'optimisation de la boucle fermée peuvent être améliorés par un autre choix de ce gain.

5.4.2 Deuxième étage – compensateur B pour systèmes stables :

Nous avons vu dans la section 2.2 les inégalités qui définissent le compensateur B pour systèmes stables. Ces inégalités imposés sur les paramètres de J garantissent que la boucle fermée formé par le retour de sortie unitaire respectera les conditions de sensibilité ε et M . Nous reprenons ci-dessous les inégalités et nous développerons une procédure pour la synthèse d'un compensateur conservateur (Bensoussan, 1984a).

$$\left\{ \begin{array}{l} k \geq n \\ k_1 \geq \max \left[2^{(k+1)/2} \omega_1 \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \right), \omega_1 \left(\frac{M-1}{M} \right) \right] \\ \omega_b > \omega_1 \left[\frac{k_1^2}{\omega_1^2 \left(1 - \frac{1}{M} \right)^2} - 1 \right]^{1/2} \\ k \tan^{-1} \left(\frac{\omega_b}{\omega_2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\omega_b}{\omega_1} \right) < \frac{\pi}{2} \\ \omega_2 > \max(\omega_b, s_0) \end{array} \right. \quad (5.8)$$

5.5 Compensateur B avec u_{max} et ω_2 non limités :

Dans un premier temps nous prenons comme critères de construction du compensateur B des considérations de sensibilité seulement. Il s'agit de la plage de fréquences sur laquelle la sensibilité sera minimisée, la valeur de la sensibilité sur cette plage et enfin la valeur maximale admise de la sensibilité sur tout le spectre fréquentiel.

Pour garantir une plus grande liberté de conception, nous adopterons une approche légèrement différente du compensateur B initial. Dans notre construction la plage de désensibilisation sera ω_s qui n'est pas égal à ω_1 . Cela nous laisse la liberté de fixer ω_1 indépendamment de la plage de fréquence pour la minimisation de la sensibilité. Le choix de ω_1 comme on le verra plus tard, influe directement sur l'erreur statique de la réponse temporelle en boucle fermée. Nous considérons $J_2(s) = 1$ pour l'instant.

Nous définissons donc la condition sur la sensibilité à la fréquence ω_s :

$$\begin{aligned} |S|_{\omega_s} \leq \varepsilon &\Leftrightarrow \left| \frac{1}{(1+J)} \right|_{\omega_s} \leq \varepsilon \\ \Leftrightarrow |(1+J)|_{\omega_s} &\geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |J|_{\omega_s} \geq \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon} \\ \left| k_1 \frac{1}{(j\omega_s + \omega_1)} \left(\frac{\omega_2}{j\omega_s + \omega_2} \right)^k \right| &\geq \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$k_1 \frac{1}{\sqrt{\omega_s^2 + \omega_1^2}} \left(\frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_s^2 + \omega_2^2}} \right)^k \geq \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon}$$

On peut reformuler cette dernière inégalité de la manière suivante :

$$k_1 \frac{1}{\sqrt{\omega_s^2 + \omega_1^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega_2}\right)^2 + 1}} \right)^k \geq \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon} \quad (5.10)$$

Sachant que $\omega_2 \gg \omega_s$ on peut approximer cette expression par :

$$k_1 \frac{1}{\sqrt{\omega_s^2 + \omega_1^2}} \geq \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon} \Leftrightarrow k_1 \geq \sqrt{\omega_s^2 + \omega_1^2} \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon} \quad (5.11)$$

Nous gardons l'inégalité relative à ω_b tel quel sachant qu'elle s'exprime en fonction de k_1 et donc de ω_s . Nous altérons par contre la condition sur la phase de J à la fréquence ω_b . En effet, la phase à ce point est très proche de la marge de phase. Nous prenons donc $\pi - PM$, où PM est la marge de phase désirée, comme valeur en lieu de $\frac{\pi}{2}$. Nous aurons donc les inégalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} k \geq n \\ k_1 \geq \sqrt{\omega_s^2 + \omega_1^2} \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon} \\ \omega_b > \omega_1 \left[\frac{k_1^2}{\omega_1^2 \left(1 - \frac{1}{M}\right)^2} - 1 \right]^{1/2} \\ k \tan^{-1} \left(\frac{\omega_b}{\omega_2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\omega_b}{\omega_1} \right) < \pi - PM \\ \pi - PM < \pi - 2 \sin^{-1} \frac{1}{2M} \\ \omega_2 > \max(\omega_b, s_0) \end{array} \right. \quad (5.12)$$

La relation $\pi - PM < \pi - 2 \sin^{-1} \frac{1}{2M}$ découle de la relation $PM > 2 \sin^{-1} \frac{1}{2M}$ (Garcia, 2006, p. 25). Noter que cette méthode diffère de la méthode originalement présentée dans

(Bensoussan, 1984a) dans laquelle $\omega_1 = \omega_s$ en donnant ainsi la liberté de fixer ω_1 indépendamment de la plage de minimisation de la sensibilité. Par contre, elle nécessite une validation ultérieure à la conception.

Nous désirons, en plus des conditions sur la sensibilité et la plage de minimisation de cette dernière, avoir une erreur statique très petite ou idéalement nulle. Nous calculons la valeur de la transmittance T en régime permanent, c'est-à-dire à $s = 0$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{k_1 \omega_2^k}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)^k + k_1 \omega_2^k} \right)_{s=0} &= 1 \\ \frac{k_1 \omega_2^k}{\omega_1 \omega_2^k + k_1 \omega_2^k} &= 1 \\ \frac{1}{\frac{\omega_1 \omega_2^k}{k_1 \omega_2^k} + 1} = 1 &\Rightarrow \frac{1}{\frac{\omega_1}{k_1} + 1} = 1 \end{aligned} \quad (5.13)$$

On en déduit donc que pour une erreur statique très petite on doit avoir $\omega_1 \ll k_1$.

On peut donc construire notre compensateur qui prend en compte trois paramètres de construction :

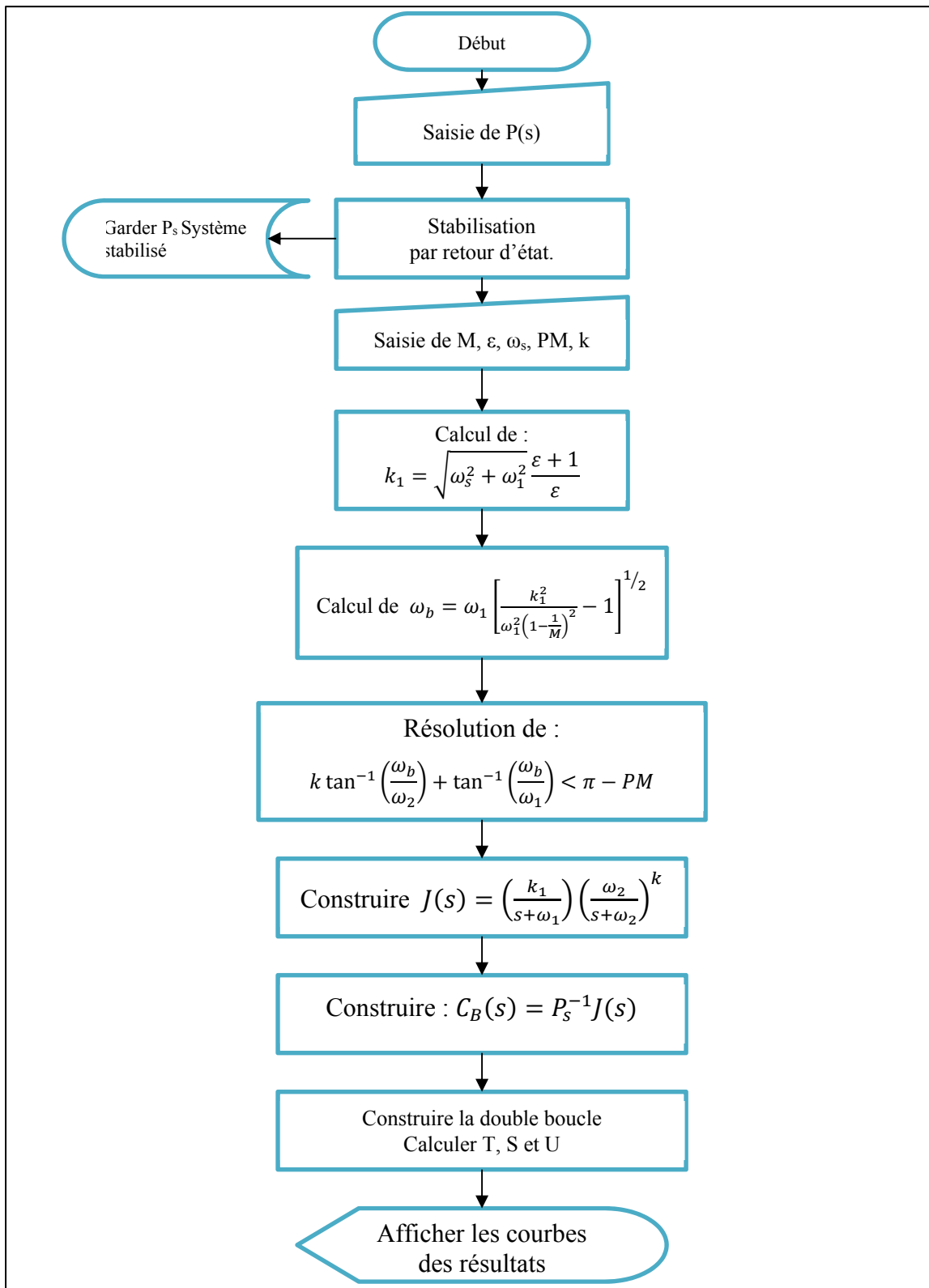
- La plage ω_s de fréquences sur laquelle on minimise la sensibilité.
- La sensibilité ε à ne pas dépasser sur la plage de minimisation.
- La sensibilité maximale M à ne pas dépasser sur tout le spectre fréquentiel.
- La marge de phase désirée.

Les étapes sont comme suit :

1. Les paramètres du système P sont introduits. Cela peut être la fonction de transfert où les matrices de sa réalisation.
2. Les conditions du compensateur sont introduites : $\omega_s, \varepsilon, M, PM$ et q (facteur de la propriété d'atténuation).
3. Calcul de $k_1 = \sqrt{\omega_s^2 + \omega_1^2} \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}$
4. Calcul de $\omega_b = \omega_1 \left[\frac{k_1^2}{\omega_1^2 \left(1 - \frac{1}{M}\right)^2} - 1 \right]^{1/2}$
5. Résolution de l'équation $k \tan^{-1} \left(\frac{\omega_b}{\omega_2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\omega_b}{\omega_1} \right) < \pi - PM$ pour ω_2 .

6. Construction de J et du compensateur $C_B = P_s^{-1}J$ avec P_s et le système stabilisé par retour d'état.
7. Construction de la boucle de retour de sortie unitaire. Affichage de la réponse temporelle à un échelon, et le diagramme de Bode de la sensibilité.

La Figure 5-6 montre l'organigramme du programme de construction de ce compensateur B.

Figure 5-6 Compensateur B avec u_{\max} non limité

5.5.1 Résultats de simulation pour u_{max} et ω_2 non limités

Pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et la marge de phase $PM=50^\circ$

On désire obtenir le compensateur qui assure une sensibilité en boucle fermée de moins de 0.2 sur une plage de fréquences allant jusqu'à 20 rad/s, et une sensibilité maximale de 1.2 sur tout le spectre de fréquences. En outre on désire une marge de phase d'au moins 50° .

Nous entrons les conditions dans le programme et nous obtenons le compensateur dont les paramètres sont : $k=3$, $k_1=120$, $\omega_1=0.01$, $\omega_2=3039$, $\omega_b=720$.

On peut voir à Figure 5-7 la courbe de la sensibilité en boucle fermée du système compensé. On voit bien que la valeur pic est effectivement inférieure à 1.2 et que la sensibilité est inférieure à 0.2 sur une plage de 24.3 rad/s. Donc en termes de sensibilité, la solution donnée par le programme respecte les conditions et est conservatrice.

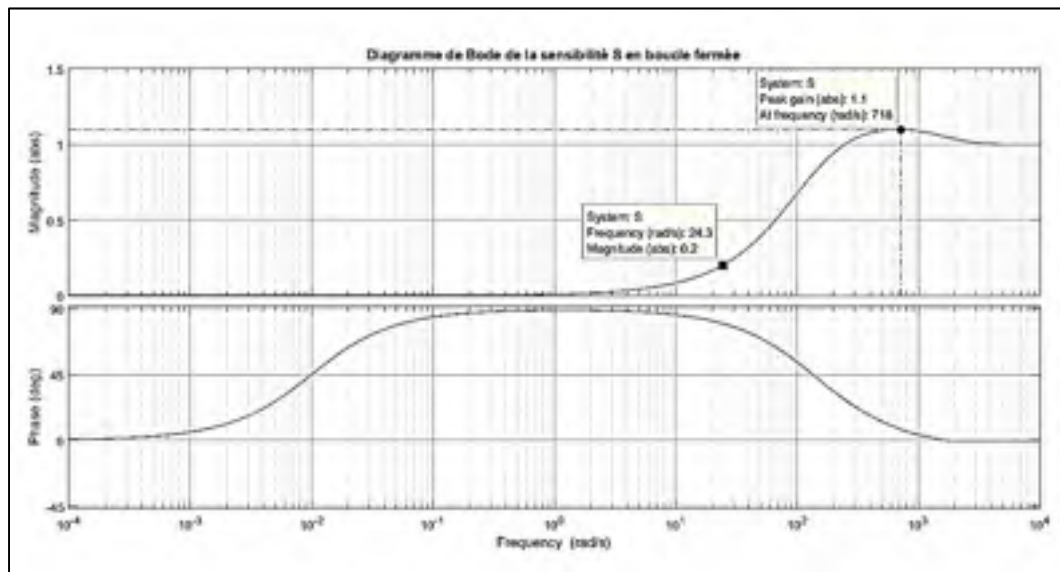


Figure 5-7 Bode de la sensibilité S pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$

Nous voulons aussi nous assurer que la marge de phase est respectée. On a à la Figure 5-8 le diagramme de Bode de la boucle ouverte du système compensé. On voit que la marge de phase est bien au-dessus de la condition de 50° et que la marge de gain, de 27 dB, est aussi satisfaisante. En effet, à la fréquence ω_b , la phase est exactement $(\pi-PM)$ à savoir 130° .

En conclusion on voit que le compensateur tel que synthétisé par notre programme répond aux exigences de départ et est conservateur par rapport aux valeurs introduites.

Nous observons la réponse temporelle à une entrée échelon dans la Figure 5-9. On voit que la réponse du système ne présente aucune oscillation et pas de dépassement. Le temps de stabilisation est de 29.5 ms, ce qui est très satisfaisant. En outre, comme exigé dans la construction du compensateur, l'erreur statique est nulle.

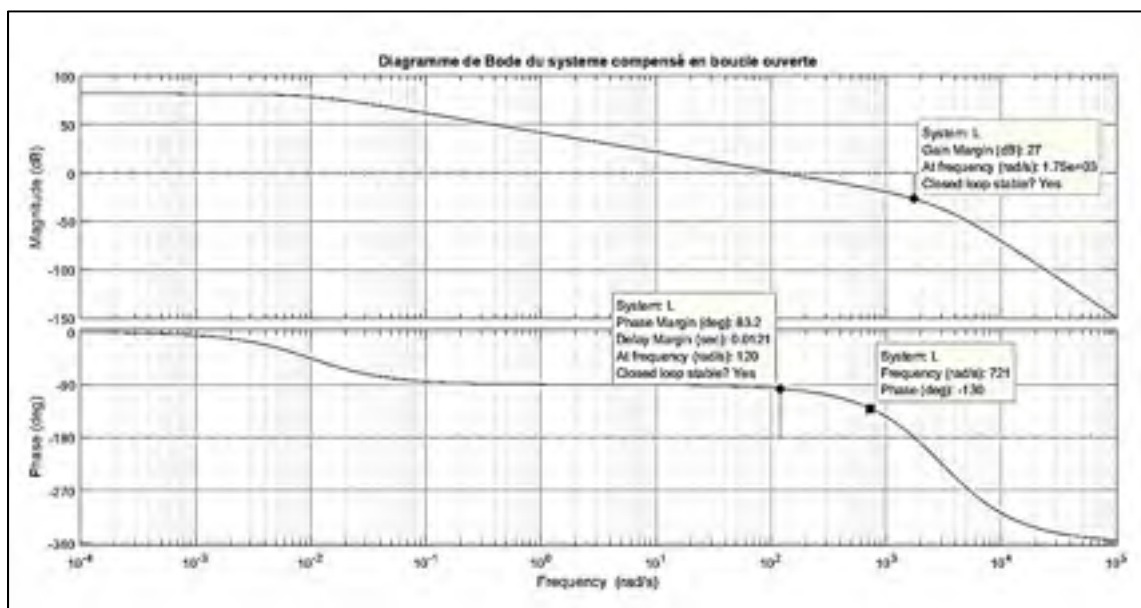


Figure 5-8 Bode de la boucle ouverte $L=PC_B$ pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$

Mais avant de valider cette construction, nous nous posons la question de l'énergie consentie pour cette compensation. Nous examinons pour cela le diagramme de Bode du compensateur C_B . Plus précisément nous notons la valeur pic de celui-ci. La Figure 5-10 montre ce diagramme. On peut y lire que la valeur $C_{B_max}=81.6$ dB.

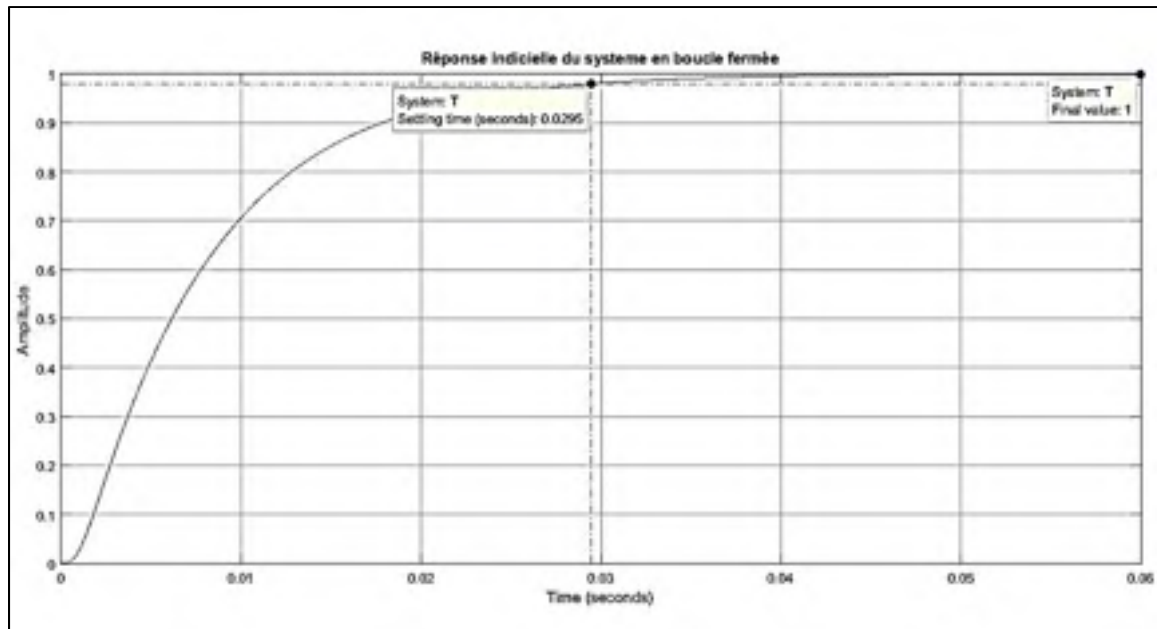


Figure 5-9 Réponse indicielle en boucle fermée pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$

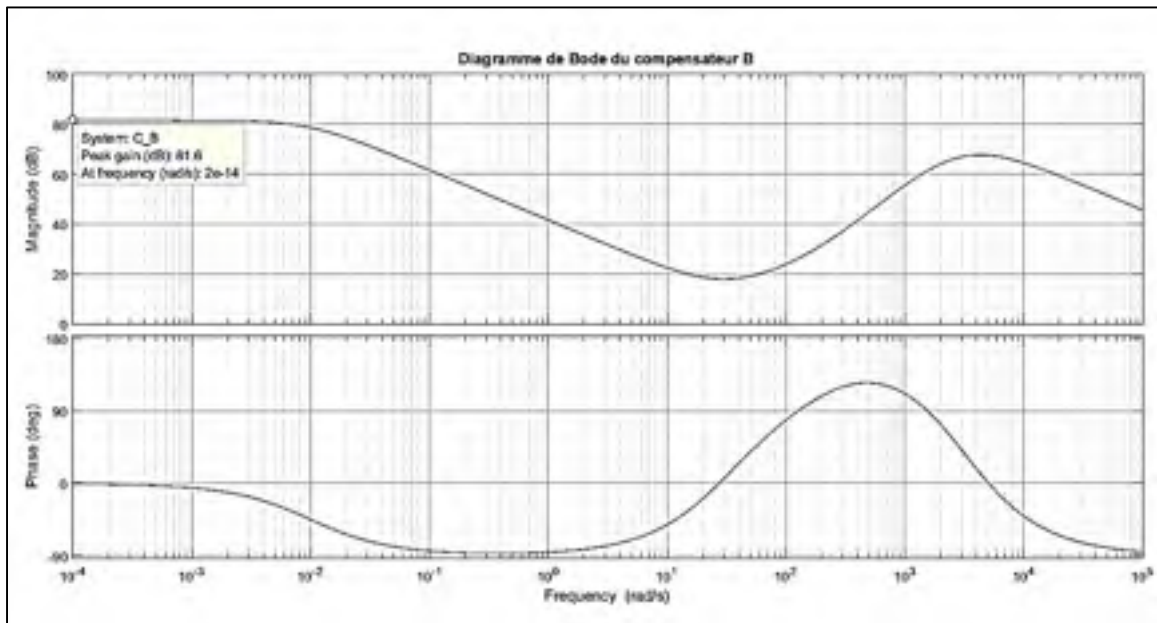


Figure 5-10 Bode du compensateur C_B pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$

Nous essayons d'autres valeurs pour obtenir d'autres compensateurs. Nous observons les différences entre les résultats obtenus.

Pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=10$ et la marge de phase $PM=50^\circ$

Dans ce cas nous reprenons les mêmes valeurs précédentes mais en réduisant la plage de minimisation ω_s à 10 rad/s. Nous obtenons le compensateur B avec les valeurs : $k=3$, $k_I=60$, $\omega_1=0.01$, $\omega_2=1520$, $\omega_b=360$.

A première vue on note que la réduction de moitié de la bande de fréquences de minimisation ω_s a eu pour effet de réduire aussi de moitié les autres paramètres (k_1 , ω_2 , ω_b). On peut donc soupçonner que ω_s peut servir de paramètre utile pour la recherche d'une solution optimale. Nous examinons par la suite les courbes obtenues avec ce compensateur. La courbe de la sensibilité dans la Figure 5-11 montre que les conditions de sensibilité sont toujours respectées sur la plage de fréquences désirée.

De même, on voit sur le diagramme de Bode de la boucle ouverte du système compensé à la Figure 5-12, que les marges de phase et de gain sont pratiquement les mêmes et que la modification de la plage de minimisation a eu pour effet de réduire la fréquence de cross-over.

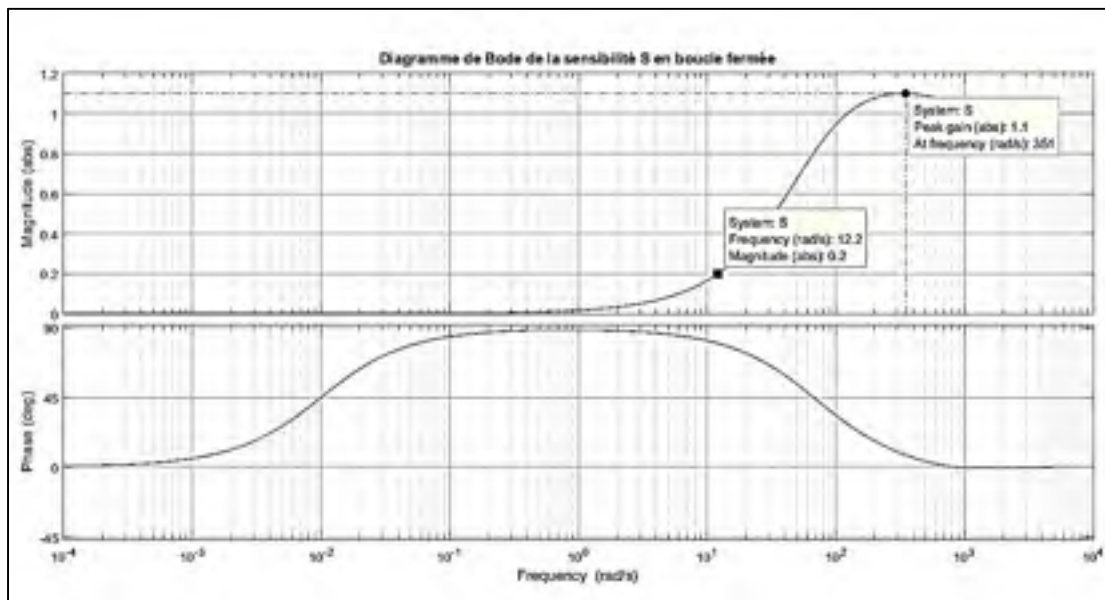


Figure 5-11 Bode de la sensibilité S pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=10$ et $PM=50^\circ$

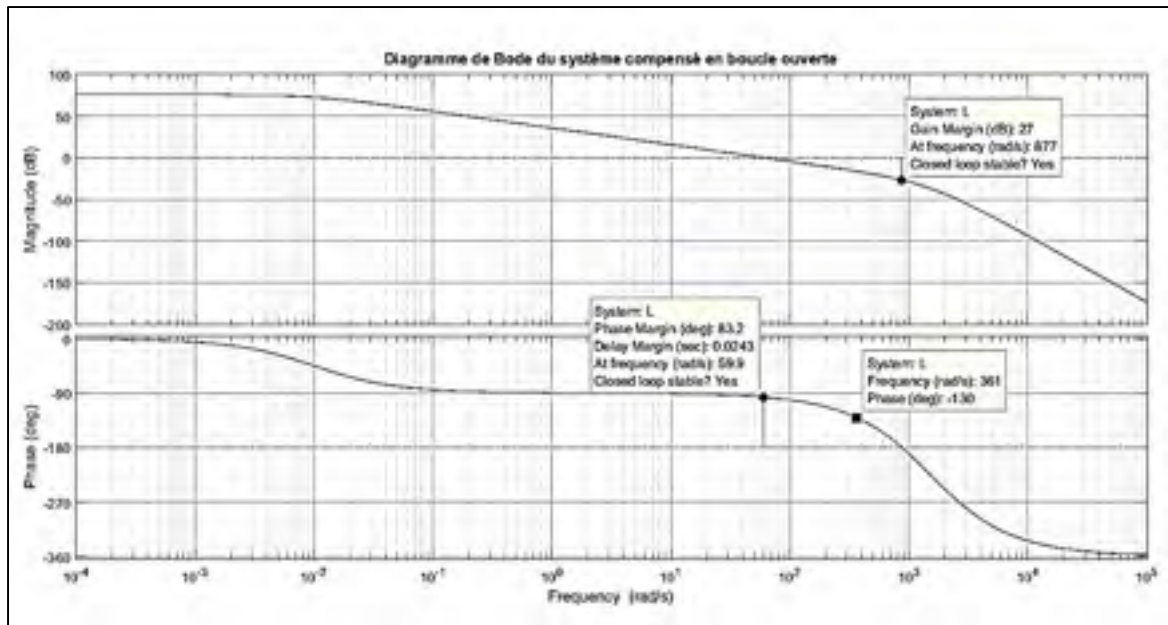


Figure 5-12 Bode de la boucle ouverte $L=PC_B$ pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=10$ et $PM=50^\circ$

La réduction de la plage de minimisation à l'effet de ralentir le système en boucle fermée comme on peut le constater sur la réponse temporelle à une entrée échelon montrée en Figure 5-13. Le temps de réponse est passé de 29.5 ms précédemment à 58.9 ms, donc presque doublé avec la réduction de moitié de ω_s .

Enfin, nous voulons observer l'effet sur le module du compensateur C_B . On peut voir sur la Figure 5-14 que la valeur pic de ce dernier est de $C_{B_max}=75.6$ dB. La réduction de la plage de minimisation a donc eu pour effet de réduire l'énergie consentie pour la compensation.

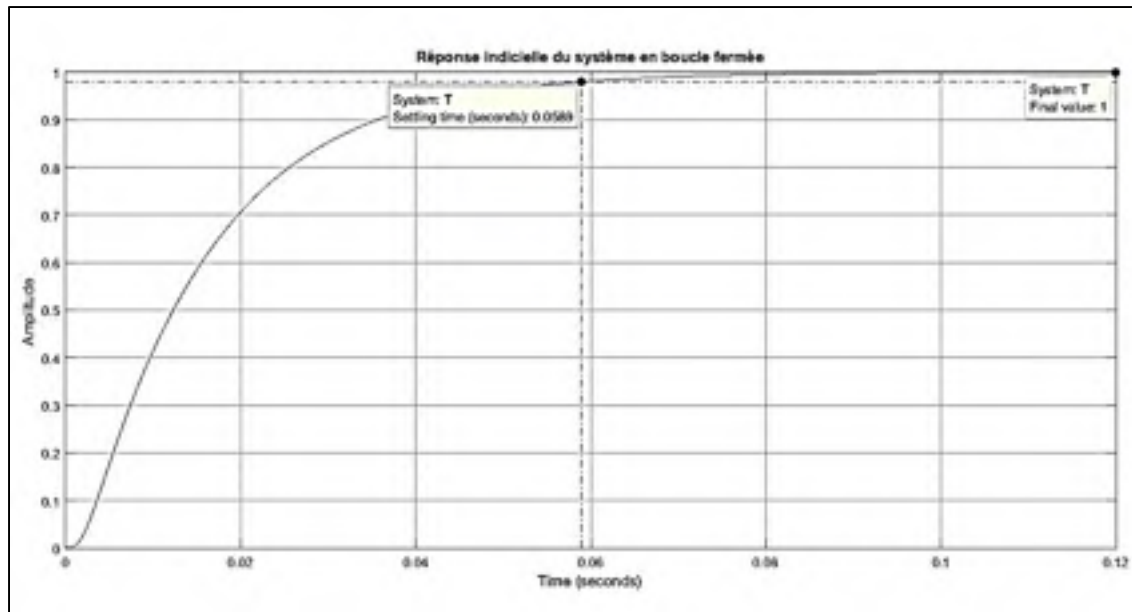


Figure 5-13 Réponse indicielle en boucle fermée pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=10$ et $PM=50^\circ$

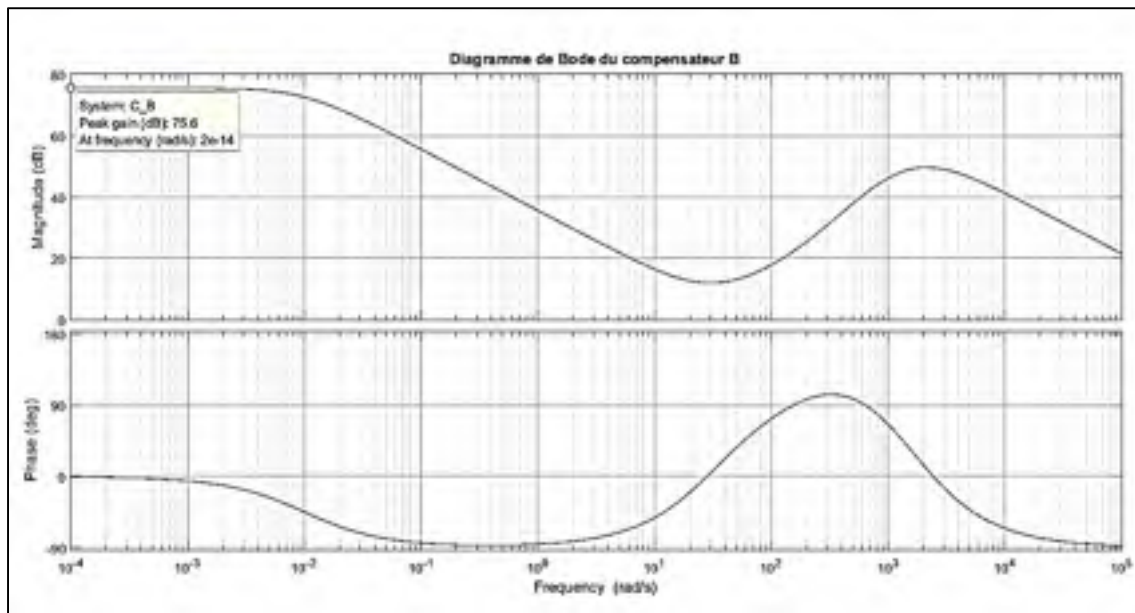


Figure 5-14 Bode du compensateur C_B pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=10$ et $PM=50^\circ$

Nous voulons à présent considérer l'effet des valeurs limites de la sensibilité. Nous gardons en premier les mêmes valeurs que le cas 1 en changeant la valeur de la sensibilité limite sur la plage de minimisation ε .

Pour $\varepsilon=0.4$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et la marge de phase $PM=50^\circ$

Pour ces valeurs, nous obtenons le compensateur dont les paramètres sont : $k=3$, $k_I=70$, $\omega_I=0.01$, $\omega_2=1773$, $\omega_b=420$. Nous présentons les résultats dans les figures ci-dessous.

Le compensateur est conservateur en termes de plage de minimisation. En effet, la plage de fréquence de minimisation est de 30 rad/s alors qu'on a exigé 20 rad/s. Cela s'explique par le fait que le compensateur est construit avec des paramètres tirés des valeurs conservatrices des inégalités (5.12). La réponse temporelle est plus lente que le cas 1 avec un temps de stabilisation de 50.5 ms.

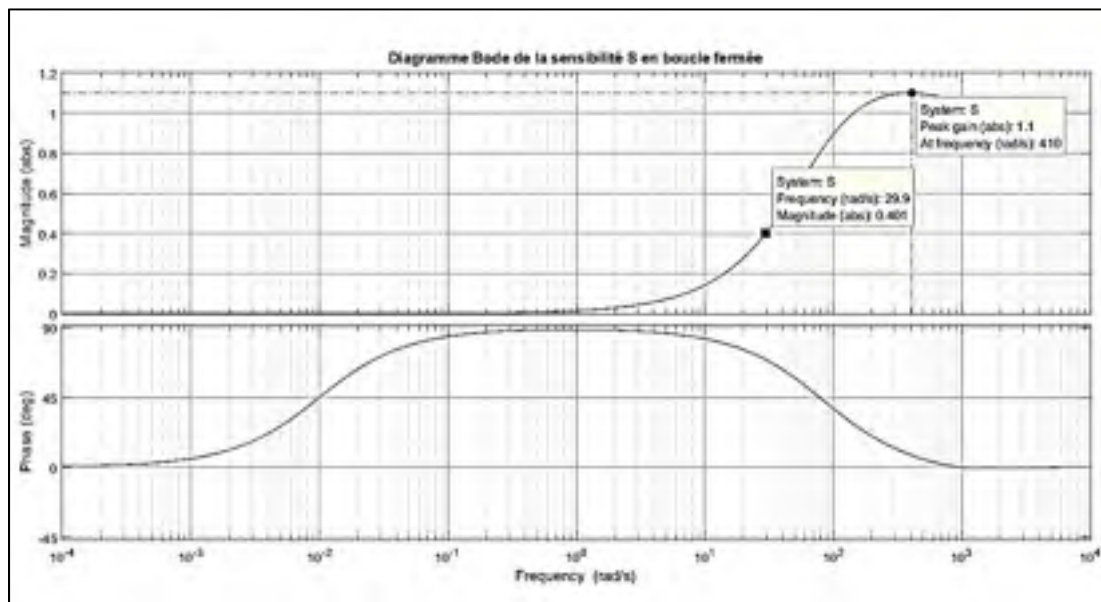


Figure 5-15 Bode de la sensibilité S pour $\varepsilon=0.4$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$

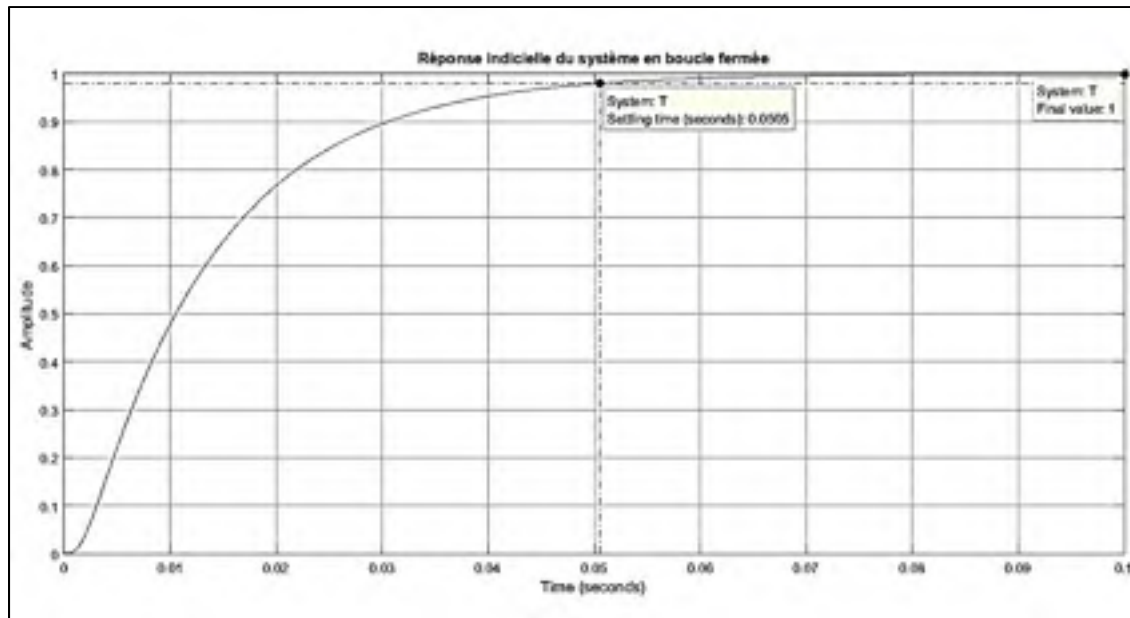


Figure 5-16 Réponse indicielle en boucle fermée pour $\varepsilon=0.4$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$

Les marges de gain et de phase restent les mêmes, alors que la fréquence de cross-over est réduite à 70 rad/s.

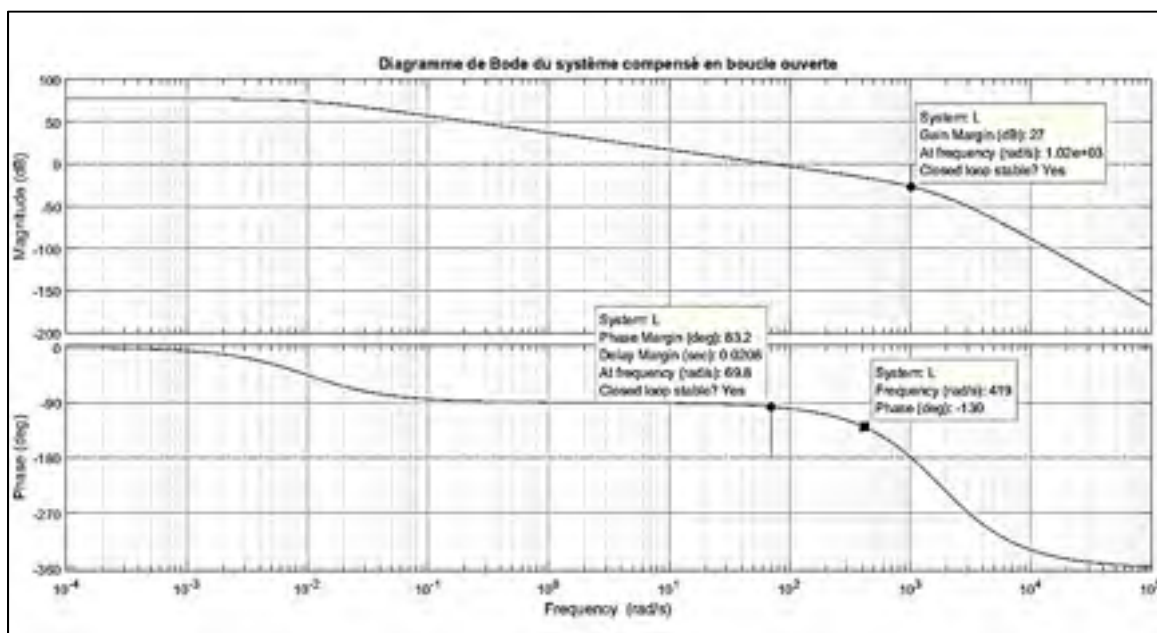


Figure 5-17 Bode de la boucle ouverte $L=PC_B$ pour $\varepsilon=0.4$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$

Pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.4$, $\omega_s=20$ et la marge de phase $PM=50^\circ$

Nous augmentons la valeur maximale de la sensibilité sur le spectre fréquentiel M à 1.4 tout en gardant les autres paramètres identiques au cas 1. On obtient un compensateur suivant : $k=3$, $k_1=120$, $\omega_1=0.01$, $\omega_2=1773$, $\omega_b=420$.

On note que l'augmentation de M a eu le même effet sur les valeurs de ω_b et ω_2 que dans le cas précédent. Par contre le gain k_1 n'a pas changé par rapport au cas 1. Il en résulte que la sensibilité est conservatrice en termes de valeur maximale. En effet, comme on peut le voir sur la Figure 5-18, la valeur maximale de sensibilité atteinte est 1.17 qui est sensiblement plus petite que la condition de départ (1.4).

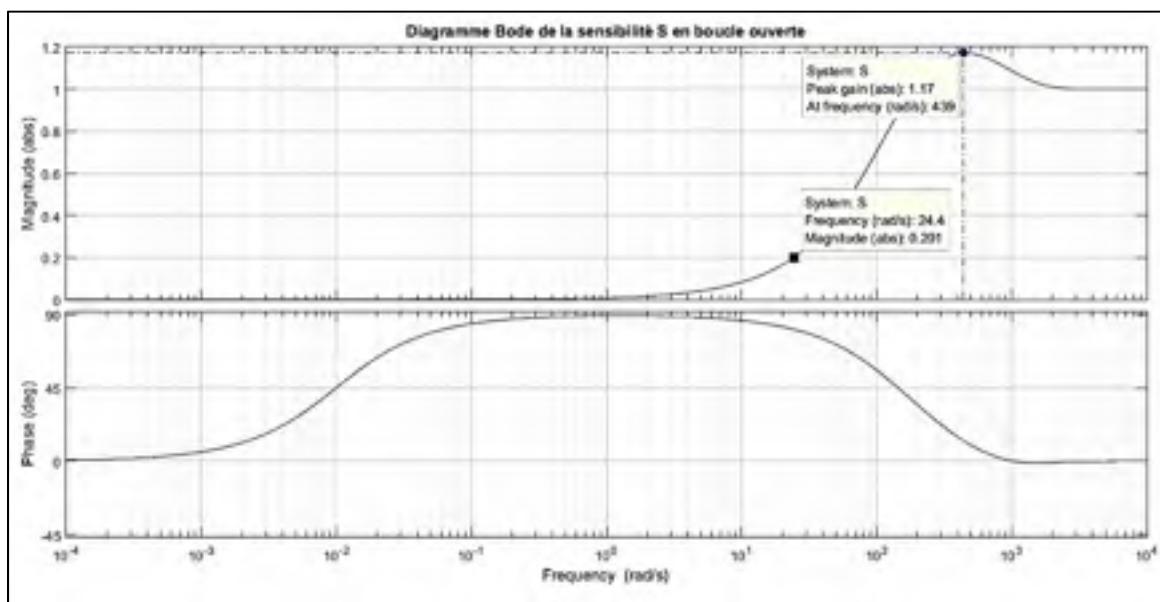


Figure 5-18 Bode de la sensibilité S pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.4$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$

Le temps de stabilisation de la réponse temporelle à une entrée échelon est de 26.8 qui est considérablement plus rapide que le cas précédent où nous avons augmenté ε . On peut conclure à première vue, que le paramètre M a une influence réduite sur la rapidité du système et sur la sensibilité alors qu'il réduit la valeur de la fréquence ω_2 nécessaire, alors que l'augmentation de ε , tout en produisant la même fréquence ω_2 , a drastiquement ralenti le système et réduit la minimisation de la sensibilité.

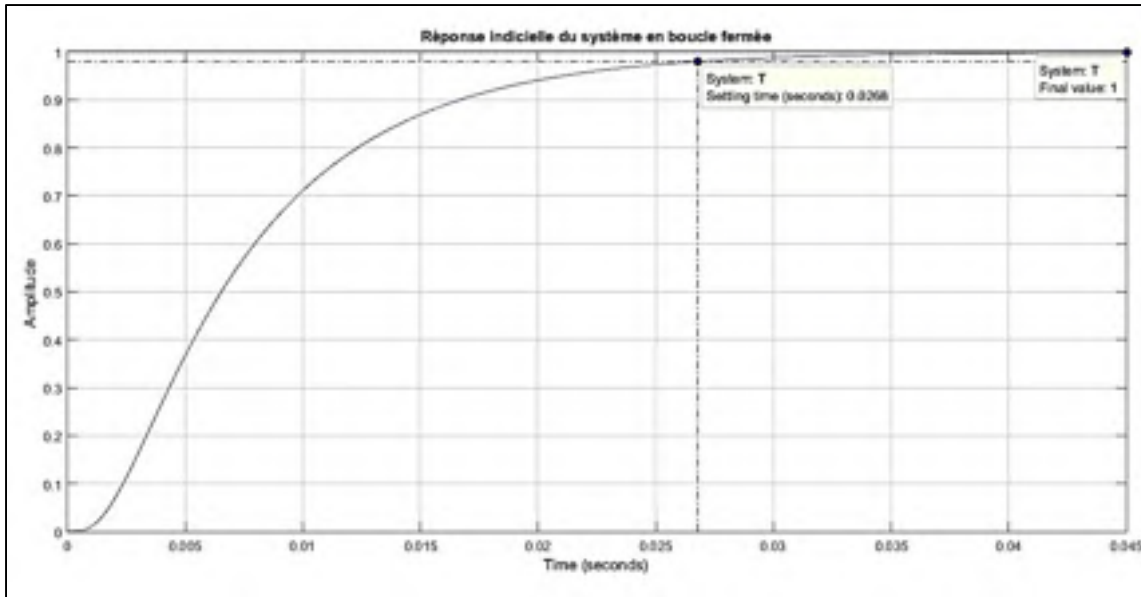


Figure 5-19 Réponse indicielle en boucle fermée pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.4$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$

On peut considérer que s'il y a lieu de relaxer des conditions de départ pour obtenir des valeurs de ω_2 inférieures, il est préférable de relaxer les conditions sur M . Les marges de gain et de phase ainsi que la fréquence de cross-over sont les mêmes que dans le cas précédent.

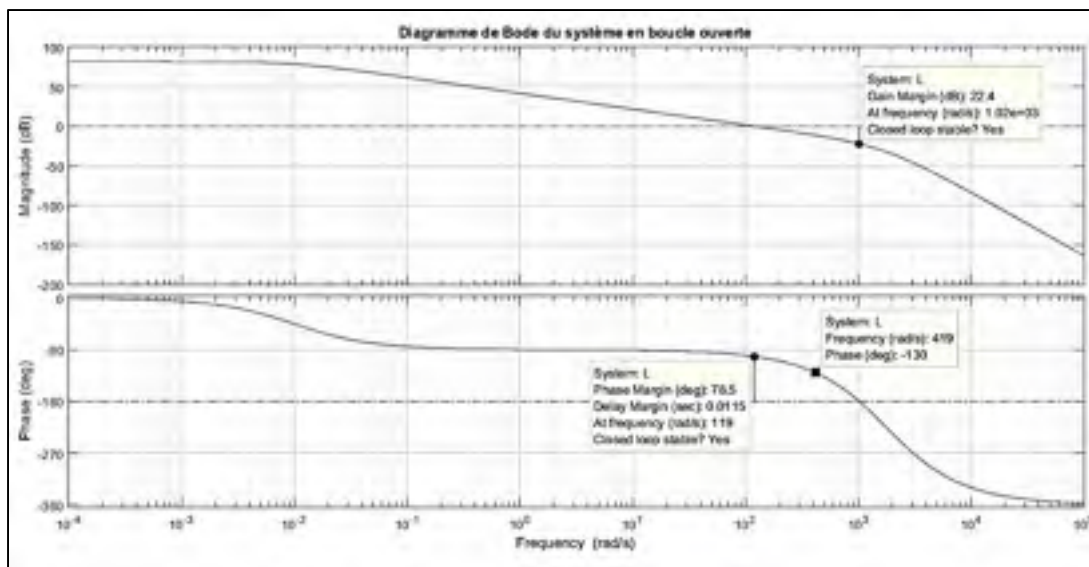


Figure 5-20 Bode de la boucle ouverte $L=PC_B$ pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.4$, $\omega_s=20$ et $PM=50^\circ$

Enfin nous voulons voir si l'exigence d'une marge de phase spécifique influence les performances du système compensé. Pour cela, nous reprenons les valeurs du cas 1 en changeant la marge de phase désirée pour 70° .

Pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et la marge de phase $PM=70^\circ$

On obtient le compensateur suivant : $k=3$, $k_I=120$, $\omega_I=0.01$, $\omega_2=6160$, $\omega_b=720$.

On voit que les paramètres du compensateur sont identiques à ceux du cas 1 sauf en ce qui concerne ω_2 puisque celle-ci est calculée à partir de l'inégalité 4 dans (5.12). Cette inégalité donne la valeur de ω_2 qui assure la phase désirée de la boucle ouverte à la fréquence ω_b .

On peut voir que la sensibilité, dans la Figure 5-21, est pratiquement la même que dans le cas 1. Il en va de même pour le temps de stabilisation qui est pratiquement le même comme on peut le voir dans la Figure 5-22.

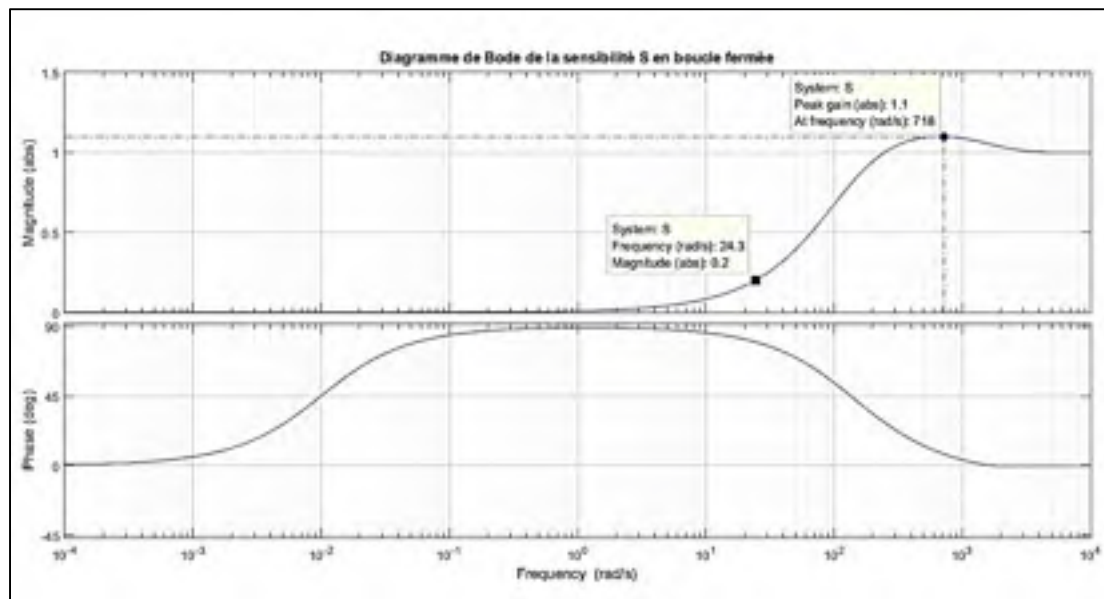


Figure 5-21 Bode de la sensibilité S pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=70^\circ$

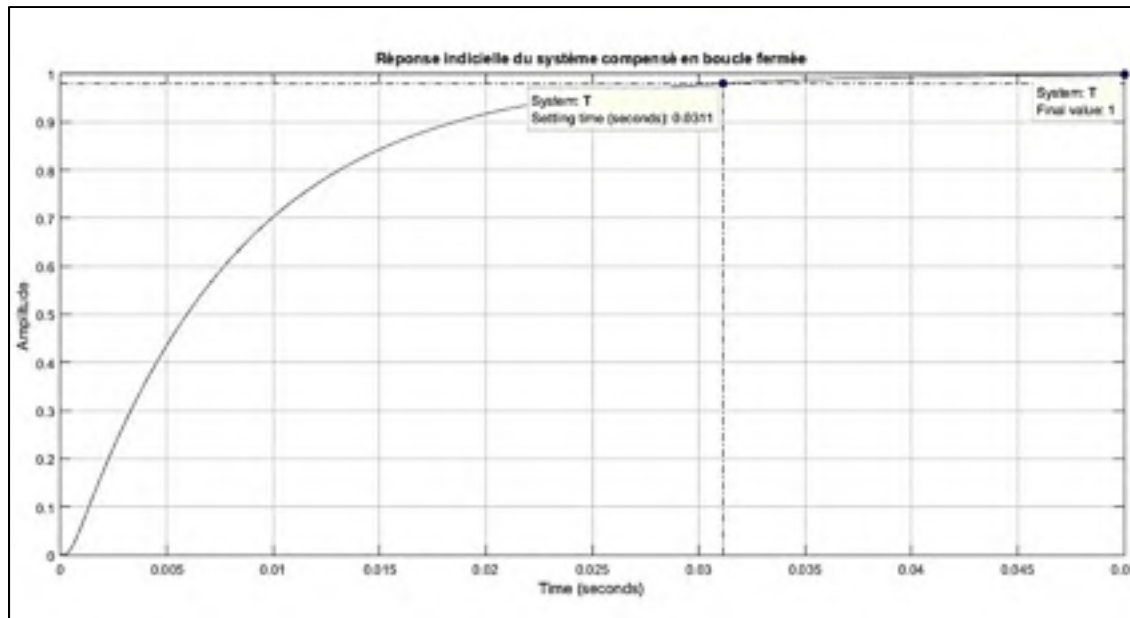


Figure 5-22 Réponse indicielle en boucle fermée pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=70^\circ$

Les marges de phase et de gain respectent les conditions de départ tout en étant conservateur. La fréquence de cross-over est restée la même car cette dernière est liée à ω_b .

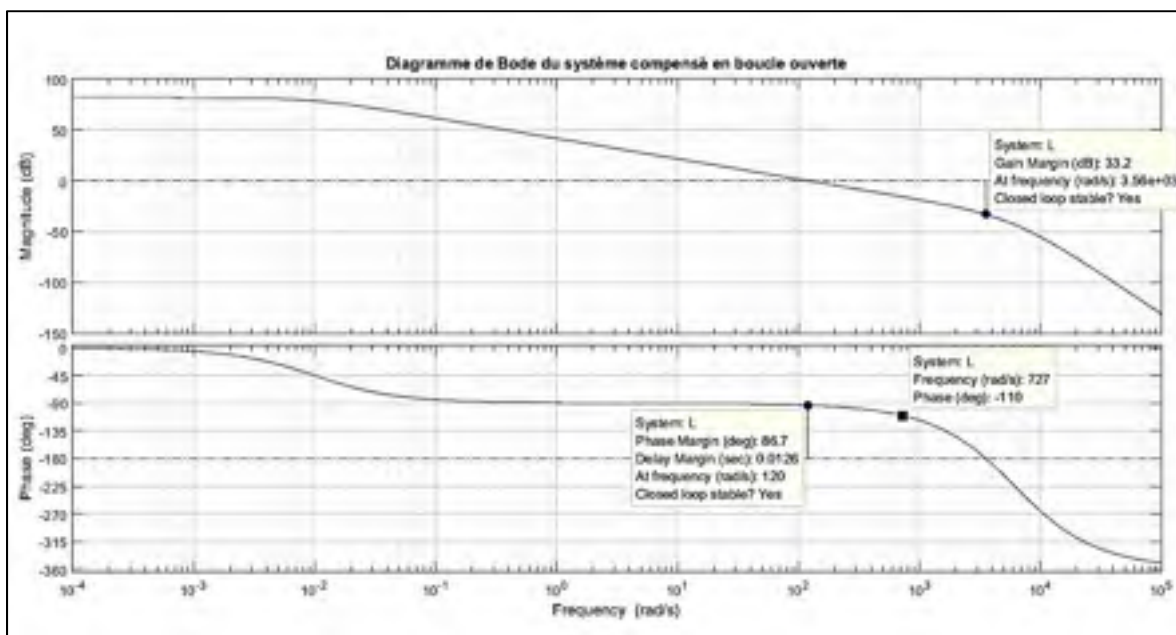


Figure 5-23 Bode de la boucle ouverte $L=PC_B$ pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.4$, $\omega_s=20$ et $PM=70^\circ$

Enfin si on observe le diagramme de Bode du compensateur B dans la Figure 5-24 on note que la valeur pic de ce dernier est la même que dans le cas 1 mais, néanmoins, on voit que l'énergie totale du compensateur, .i.e. la norme 2 du signal, a augmenté par rapport au cas 1.

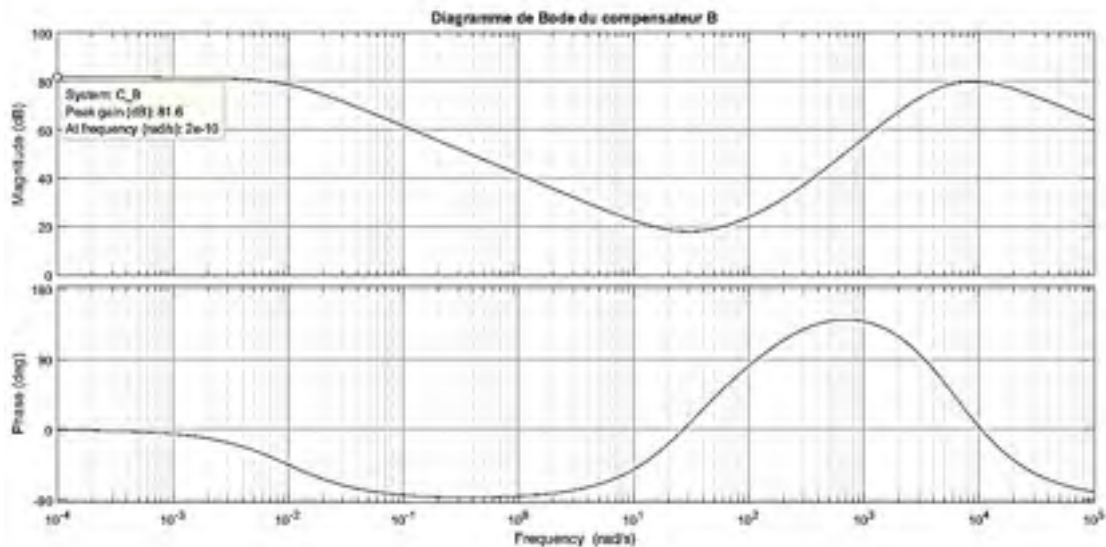


Figure 5-24 Bode du compensateur C_B pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$ et $PM=70^\circ$

5.5.2 Discussion des résultats pour u_{max} , C_{Bmax} et ω_2 non limités

On a vu différents cas où on a imposé différentes conditions de sensibilité, de plage de minimisation de sensibilité et de marge de phase désirée.

On a vu que la plage de minimisation de la sensibilité ω_s avait un effet direct et proportionnel sur la bande passante de la boucle fermée, le temps de stabilisation ainsi que la norme du compensateur B. Cela fait que le choix de ω_s ne peut être arbitraire si on désire maintenir un compromis entre l'énergie fournie par la compensation et les performances temporelles du système en boucle fermée.

D'autre-part, nous avons noté que la relaxation des conditions sur M n'influe pas considérablement sur les performances du système mais par contre l'augmentation de cette valeur permet d'obtenir des valeurs inférieures de ω_2 . Dans l'implémentation du compensateur, des valeurs élevées de ω_2 conduisent à des fréquences d'échantillonnage élevées et imposent des bandes passantes larges pour les capteurs.

Enfin, on peut constater que, si le compensateur atteint les objectifs de minimalisation de la sensibilité en boucle fermée avec la marge de phase désirée, nous ne pouvons spécifier l'énergie consentie pour la compensation ni imposer de limite au signal de commande ou bien préciser le temps de stabilisation du système en boucle fermée. Or, ces trois aspects sont importants dans la spécification des objectifs de la commande.

Dans ce qui suit nous allons chercher à modifier le compensateur construit dans la section précédente et ce pour prendre en considération les trois critères, en plus des objectifs de minimisation de la sensibilité.

5.6 Compensateur B avec u_{max} limité :

Dans cette partie nous voulons considérer le signal de commande qui est injecté au système instable.

Si le signal de commande est trop important, il peut causer la saturation des actionneurs et provoquer des non linéarités dans le système. Cet effet est mesuré par la valeur pic du signal de commande u qui est donné par $\|u\|_{\infty}$.

Si le signal de commande est élevé sur une longue période, il risque de provoquer la surchauffe des éléments du système sans nécessairement les saturer. Cet aspect est quantifié par l'énergie du signal de commande, c'est-à-dire $\|u\|_2$.

Nous allons donc étudier l'expression de u . Nous reprenons l'équation (4.56) du compensateur équivalent au retour d'état avec observateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - BK - K_e C)\hat{x} + K_e y + BK_r r \\ u = -K\hat{x} + K_r r \end{cases} \quad (5.14)$$

On peut déduire l'expression de u comme étant :

$$\begin{aligned} u = & -K(sI - (A - BK - K_e C))^{-1} K_e y + \\ & + (K_r - K(sI - (A - BK - K_e C))^{-1} BK_r) r \end{aligned} \quad (5.15)$$

Ceci peut être schématisé par un système à retour de sortie comme montré dans la Figure 5-25.

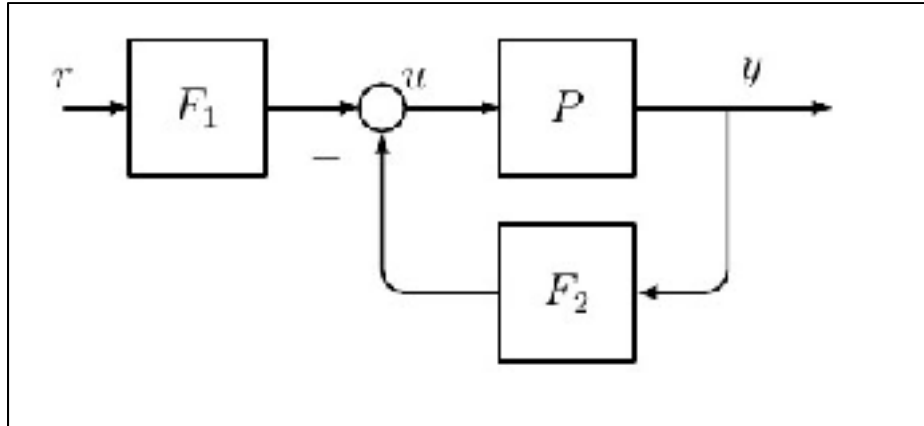


Figure 5-25 Schéma équivalent au retour d'état avec observateur

Où nous définissons :

$$\begin{aligned} F_1 &= K_r - K(sI - (A - BK - K_e C))^{-1} B K_r \\ F_2 &= K(sI - (A - BK - K_e C))^{-1} K_e \end{aligned} \quad (5.16)$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} u &= F_1 r - F_2 y \\ P_s &= F_1 P (I + P F_2)^{-1} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Où P_s est le système stabilisé par le retour d'état avec compensateur.

Lorsqu'on introduit ce premier étage dans la boucle de retour de sortie du compensateur B on obtient le schéma de la Figure 5-26.

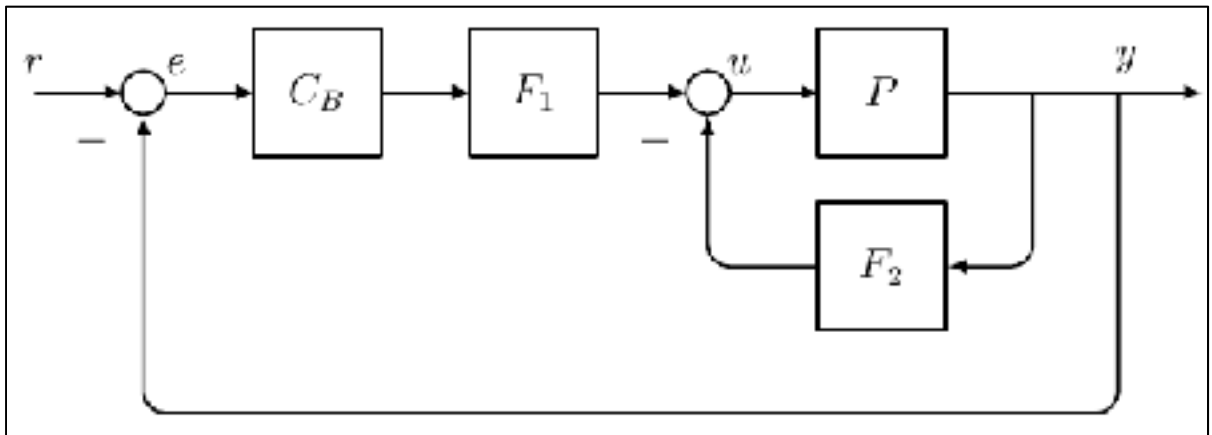


Figure 5-26 Schéma de la double boucle avec le schéma équivalent du premier étage

On voit bien que le r dans l'équation (5.17) devient la sortie du compensateur B. Donc on aura :

$$\begin{aligned} u &= F_1(C_B e) - F_2 y \\ u &= F_1(C_B S r) - F_2 T r \end{aligned} \quad (5.18)$$

Nous avons utilisé les définitions de T et S et le fait que :

$$\begin{aligned} e &= S r \\ y &= T r \end{aligned} \quad (5.19)$$

Et sachant que dans le cas de la compensation B on a :

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{J(s)}{1 + J(s)} \\ S(s) &= \frac{1}{1 + J(s)} \\ C_B(s) &= P_s^{-1}(s)J(s) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Et en remplaçant dans (5.18) on obtient :

$$\begin{aligned} u &= F_1(P_s^{-1})Tr - F_2 Tr \\ \frac{u}{r} &= (F_1 P_s^{-1} - F_2)T \end{aligned} \quad (5.21)$$

Nous remplaçons P_s par son expression

$$\frac{u}{r} = (F_1(F_1 P(I + P F_2)^{-1})^{-1} - F_2)T \quad (5.22)$$

En procédant aux simplifications mathématiques on arrive à l'expression de u :

$$\frac{u}{r} = P^{-1}T \quad (5.23)$$

On voit donc que le signal de commande ne dépend que du système instable ainsi que de la boucle fermée désirée et du signal de référence. Cela confirme notre hypothèse que l'étage de stabilisation n'influe pas sur le choix de la boucle fermée finale ou sur le signal de contrôle.

Donc afin d'obtenir un signal de commande avec un spectre fréquentiel désiré, on doit mettre des conditions sur T sachant que P est une donnée du problème et ne peut être modifiée.

Nous désirons donc trouver une condition sur T (et par extension sur J) de manière à résoudre le problème sous optimal de minimisation de l'énergie de commande, à savoir :

Pour $\gamma \geq 1$ trouver le compensateur C_B tel que

$$\|u\|_{\infty} \leq \gamma U_{min} \quad \text{où } U_{min} = P^{-1}(0) \text{ est le signal de commande} \quad (5.24)$$

minimum si $T(0)=1$

Nous avons trouvé une telle condition qui assure le respect d'une manière conservatrice de la condition sur la norme infini du signal de commande. Nous la présentons ici sans preuve formelle, mais qui néanmoins a été vérifiée par simulation de plusieurs cas sur différents processus. Nous travaillons à établir cette preuve et elle pourrait faire l'objet de travaux en perspectives de ce mémoire.

Condition pour la résolution du problème sous optimal de minimisation du signal de commande :

Soit un système P stabilisé par un compensateur dans un premier étage, sur lequel on applique une boucle de retour de sortie avec un compensateur B. Si on a :

$$\gamma U_{min}|P| = M \text{ à une fréquence } \omega_u$$

Alors il existe un compensateur B qui assure $\|u\|_{\infty} < \gamma U_{min}$

Ce compensateur B est celui qui vérifie la condition $|S| = \|S\|_{\infty} = M$ à la fréquence ω_u .

Il est clair qu'un tel compensateur n'est pas unique et que pour chaque valeur ε correspond un tel compensateur. Le compensateur décrit ci-haut est conservateur et ne correspond pas au cas $\|u\|_{\infty} = \gamma U_{min}$.

Nous implémentons alors cette condition dans notre algorithme de construction du compensateur B. Les étapes du nouvel algorithme sont :

1. Les paramètres du système P sont introduits. Cela peut être la fonction de transfert où les matrices de sa réalisation.
2. Les paramètres du compensateur sont introduites : $k, \varepsilon, M, \gamma$
3. Calcul de la fréquence ω_u pour laquelle $\gamma U_{min}|P| = M$
4. Calcul de ω_s pour laquelle $|S(\omega_u)| = \|S\|_{\infty} = M$ et $\omega_2 = 2.2 * \omega_b$
5. Calcul de $k_1 = \sqrt{\omega_s^2 + \omega_1^2} \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}$
6. Calcul de $\omega_b = \omega_1 \left[\frac{k_1^2}{\omega_1^2 \left(1 - \frac{1}{M}\right)^2} - 1 \right]^{1/2}$

7. Calcul de $\omega_2 = 2.2 * \omega_b$.
8. Construction de J et du compensateur sous optimal $C_B = P_s^{-1}J$. Tel que P_s et le système stabilisé par retour d'état.
9. Construction de la boucle de retour de sortie unitaire. Vérification de la valeur maximale de u . Si $\|u\|_\infty < \gamma U_{min}$, alors augmenter ω_s jusqu'à ce qu'on obtienne $\|u\|_\infty = \gamma U_{min}$ à un facteur de tolérance près.
10. Construction du compensateur optimal. Construction de la boucle fermée.
11. Affichage des résultats : diagramme de Bode de la sensibilité, réponse temporelle à un échelon, diagramme de Bode du signal de commande u .

On note que ω_s n'est plus un critère de conception mais une variable avec laquelle on assure la condition de minimisation du signal de commande. En outre, pour des considérations d'implémentation de la démarche pour les méthodes numériques, la valeur de ω_2 a été fixée à la valeur $2.2\omega_b$. En effet, l'alternative serait de résoudre le système d'équations suivant pour les variables ω_s et ω_2 :

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{(\varepsilon + 1)\omega_2^k \sqrt{\omega_1^2 + \omega_s^2}}{\varepsilon(j\omega_u + \omega_1)(j\omega_u + \omega_2)^k + (\varepsilon + 1)\omega_2^k \sqrt{\omega_1^2 + \omega_s^2}} \right| = M \\
 & \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{M^2(\varepsilon^2\omega_s^2 + 2\varepsilon(\omega_1^2 + \omega_s^2) + \omega_1^2 + \omega_s^2) + 2M\varepsilon^2\omega_1^2 - \varepsilon^2\omega_1^2}}{\varepsilon\omega_2(M - 1)} \right) + \\
 & + \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{M^2(\varepsilon^2\omega_s^2 + 2\varepsilon(\omega_1^2 + \omega_s^2) + \omega_1^2 + \omega_s^2) + 2M\varepsilon^2\omega_1^2 - \varepsilon^2\omega_1^2}}{\varepsilon\omega_1(M - 1)} \right) \\
 & < \pi - PM
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Sachant que ω_1, M, ε et PM sont des données et que ω_u est déterminée au début.

Mais la résolution de ce système d'équations se révèle un problème numériquement ardu en l'absence d'une formulation plus avenante aux méthodes de calcul numériques.

Pour pallier à ce problème on a fixé la valeur de ω_2 à une valeur assez grande par rapport à ω_b . Pour le cas étudié la valeur de $\omega_2 = 2.2\omega_b$ assure des marges de phase satisfaisantes dans tous les cas étudiés.

5.6.1 Résultats de simulation pour u_{max} limité

On montre ci-après quelques exemples de l'application de l'algorithme pour la synthèse d'un compensateur qui respecte des conditions de sensibilité et de signal de commande.

Pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=1$

Pour ce premier cas on désire la valeur minimum pour le signal de commande en choisissant $\gamma=1$. En réalité il est possible d'obtenir des valeurs plus inférieures de u mais, sachant que à $\omega = 0$ on a $u(0) = P^{-1}(0)T(0)$ et étant donné que $P^{-1}(0)$ est une donnée, la valeur de $u(0)$ dépend de $T(0)$. Or si l'on désire une erreur statique nulle, nous voudrions que $T(0) = 1$.

Donc il en résulte que, pour une erreur statique nulle, on a $u(0) = P^{-1}(0)$. On ne peut donc pas avoir une valeur pic du signal de commande en dessous de $P^{-1}(0)$.

D'autre part, la méthode de résolution du problème sous optimal fait que pour le compensateur sous optimal on a :

$$\gamma U_{min}|P| = M \quad \text{avec } U_{min} = P^{-1}(0) \quad (5.26)$$

Or si :

$$\gamma U_{min}\|P\|_{\infty} < M \quad (5.27)$$

Le compensateur B sous optimal ne peut exister. Dans ce cas il faut soit mettre $\gamma = \frac{M}{U_{min}\|P\|_{\infty}}$

ou bien $M = \gamma U_{min}\|P\|_{\infty}$.

Dans le cas $M = 1.2$ et $\gamma = 1$, on choisit de corriger la valeur de M car on désire obtenir le signal de commande minimum. L'algorithme nous propose donc de prendre la valeur $M = 1$. Cette valeur, néanmoins, produit une valeur extrême de $\omega_s = 0$ qui déstabilisé la courbe fermée. Pour pallier à ça, nous prenons $\gamma = 1.01$ et une valeur corrigée $M = 1.01$ qui reste très proche de notre objectif.

L'algorithme recherche le compensateur selon la condition cité précédemment. Ceci produit un compensateur conservateur avec $\omega_s = 0.01$. Puis l'algorithme fait augmenter cette valeur jusqu'à ce que $\|u\|_{\infty} = u_{max}$. Le compensateur obtenu a les caractéristiques suivantes : $k=3$, $k_l=1.85$, $\omega_l=0.01$, $\omega_2=410.04$, $\omega_b=246.95$ et $\omega_s=0.41$

On peut voir la courbe de la sensibilité dans la Figure 5-27.

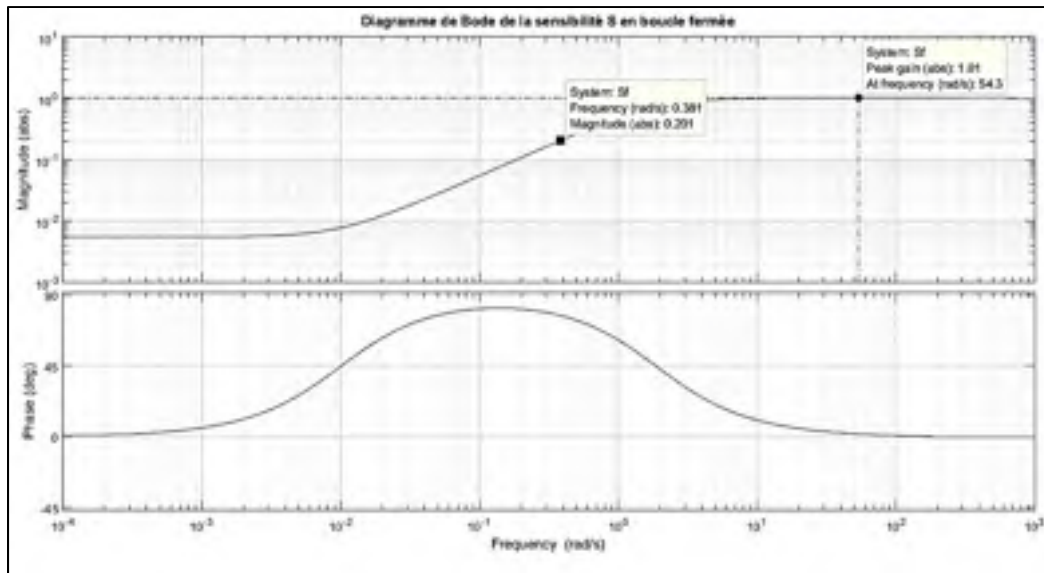


Figure 5-27 Bode de la sensibilité S pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=1.01$

La réponse temporelle du système à une entrée échelon est montrée à la Figure 5-28. On voit bien que le temps de stabilisation est très important, de l'ordre de 2 secondes. Cela n'est pas surprenant sachant que nous avons investi le minimum d'énergie pour seulement maintenir la stabilité du système et respecter la minimisation de la sensibilité. La valeur en régime permanent présente une erreur statique de l'ordre de 0.5%.



Figure 5-28 Réponse indicielle en boucle fermée pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=1.01$

Nous vérifions que le compensateur limite la valeur maximale du signal de commande en observant le diagramme de Bode de u montré dans la Figure 5-29

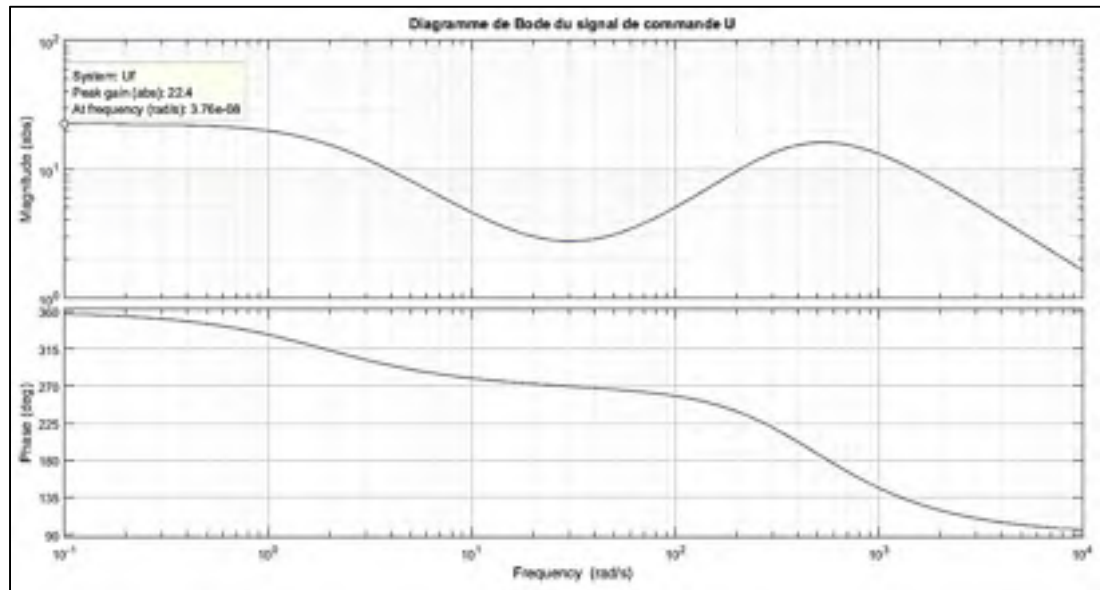


Figure 5-29 Diagramme de Bode du signal u pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=1.01$

On voit bien que la valeur maximale du signal de commande intervient au régime permanent, c'est-à-dire à $\omega = 0$. Cette valeur est le signal constant en régime permanent nécessaire pour maintenir la boule suspendue à sa position désirée. On peut voir cela sur la courbe temporelle du signal de commande. Le signal, après une phase transitoire où sa valeur en absolu ne dépasse pas la limite fixé, tend vers la valeur u_{max} .

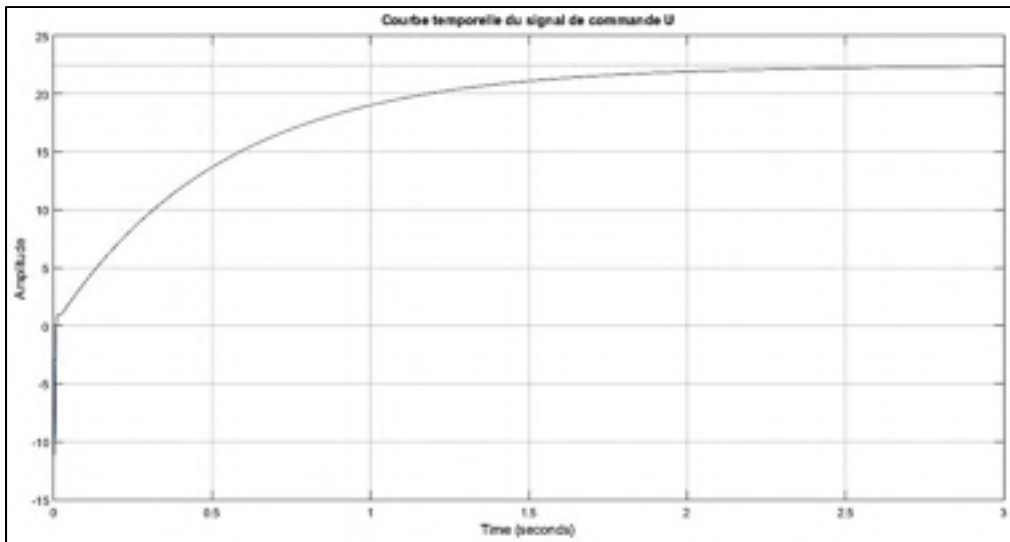


Figure 5-30 Courbe temporelle du signal de commande pour $\epsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=1.01$

Enfin, nous désirons voir l'énergie consentie par la compensation. Nous observons cela sur le diagramme de Bode du compensateur B montré dans la Figure 5-31.

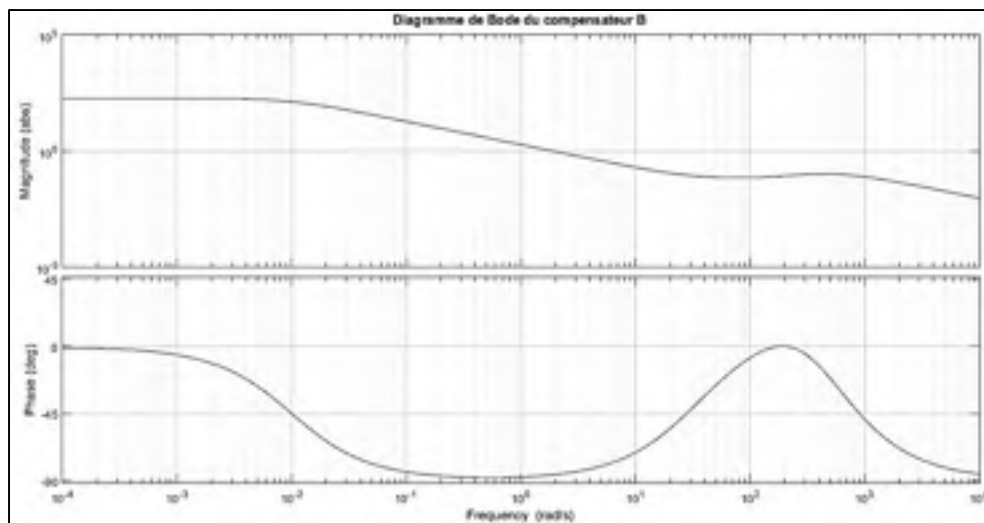


Figure 5-31 Bode du compensateur C_B pour $\epsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=1.01$

On voit ainsi que la valeur pic du module du compensateur est 45.32 dB, soit 184.5.

Nous allons considérer deux autres cas avec une valeur de u_{max} intermédiaire et une autre valeur élevée.

Pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=10$

On cherche à obtenir une boucle fermée du système dont la sensibilité est maintenue en dessous de 0.2 sur une plage de fréquences et en dessous de 1.2 sur tout le spectre fréquentiel et pour lequel le signal de commande ne dépasse pas $10 \times U_{\min} = 225.51$.

L'algorithme obtient le compensateur conservateur pour $\omega_s = 3.79$. Il recherche par la suite en augmentant ω_s le compensateur qui se rapproche le plus du cas $\|u\|_{\infty} = U_{\max}$. On obtient le compensateur dont les caractéristiques sont : $k=3$, $k_I = 28.76$, $\omega_1=0.01$, $\omega_2= 379.61$, $\omega_b=176.15$ et $\omega_s= 4.89$

On examine les courbes de la sensibilité, de la réponse temporelle et du signal de commande dans les figures suivantes :

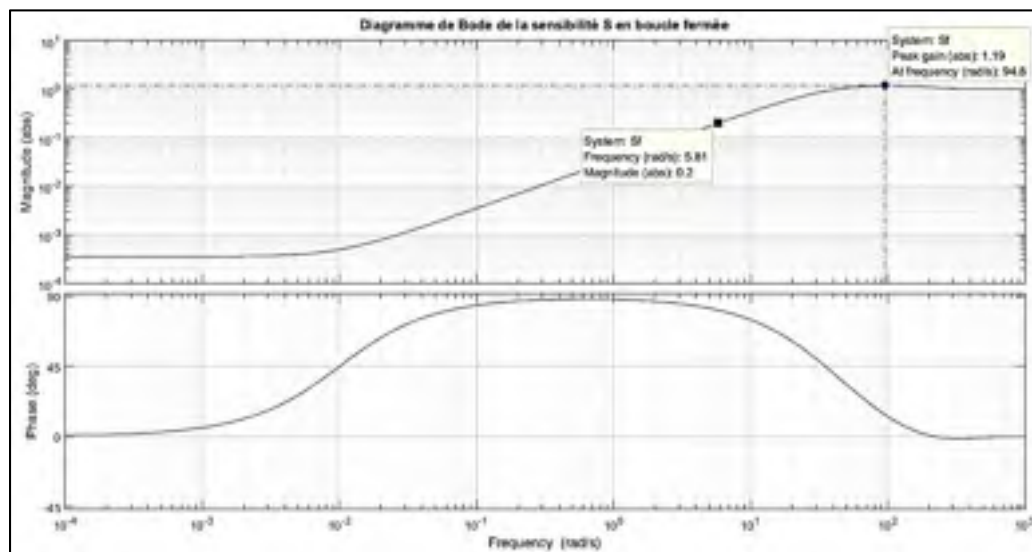


Figure 5-32 Bode de la sensibilité S pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=10$

On voit que la sensibilité respecte les conditions de départ, sachant que M n'étant plus limité par la condition sur γ , on peut maintenir la valeur de 1.2. D'autre part, proportionnellement avec l'augmentation du signal de commande maximal, la plage de minimisation a augmenté elle aussi. Cela a pour effet une meilleur désensibilisation du système aux perturbations et par ricochet l'augmentation de la bande passante de la transmittance T . On peut confirmer cela en notant la réponse indicielle sur la Figure 5-33. Le temps de stabilisation du système s'est

nettement amélioré passant de 2 secondes à 100 ms. Donc pour une augmentation du signal de commande maximal de l'ordre de 10 fois, nous avons obtenu une diminution du temps de stabilisation de l'ordre de 20 fois. L'erreur statique est nulle.

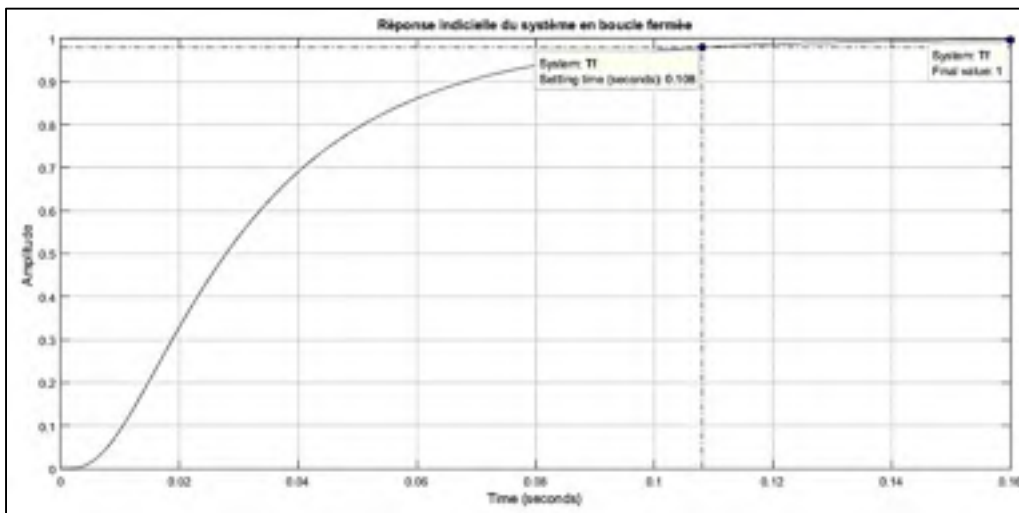


Figure 5-33 Réponse indicielle en boucle fermée pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=10$

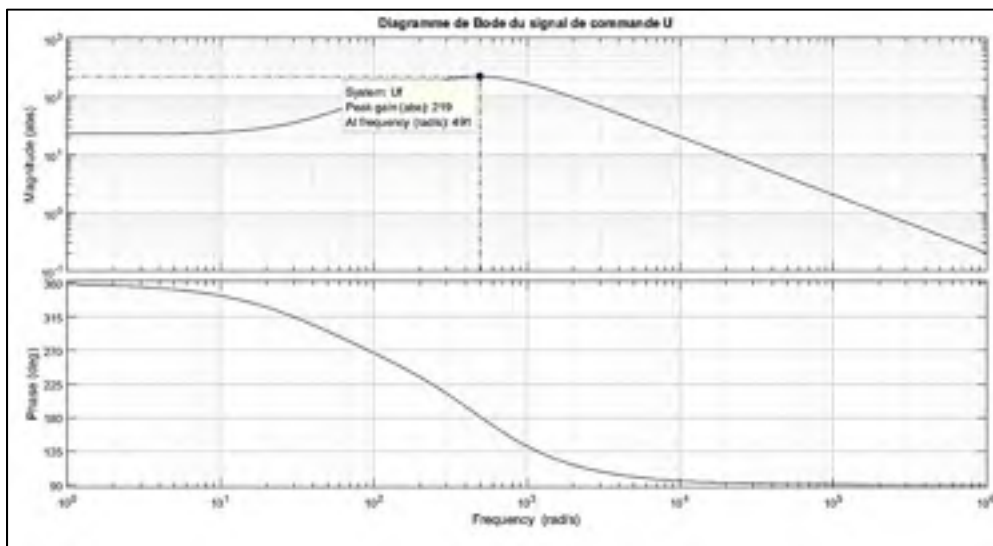


Figure 5-34 Diagramme de Bode du signal u pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=10$

On peut voir sur le diagramme de Bode du signal de commande, sur la Figure 5-34, que la valeur pic de ce dernier est 219. Cela satisfait à notre exigence de valeur maximale inférieure à 225.51. On observe cela sur la courbe temporelle du signal de commande sur la Figure 5-35.

On voit que le signal U atteint une valeur pic, négative, de 152 puis remonte pour tendre vers la valeur $U_{min} = 22.5$ en régime permanent.

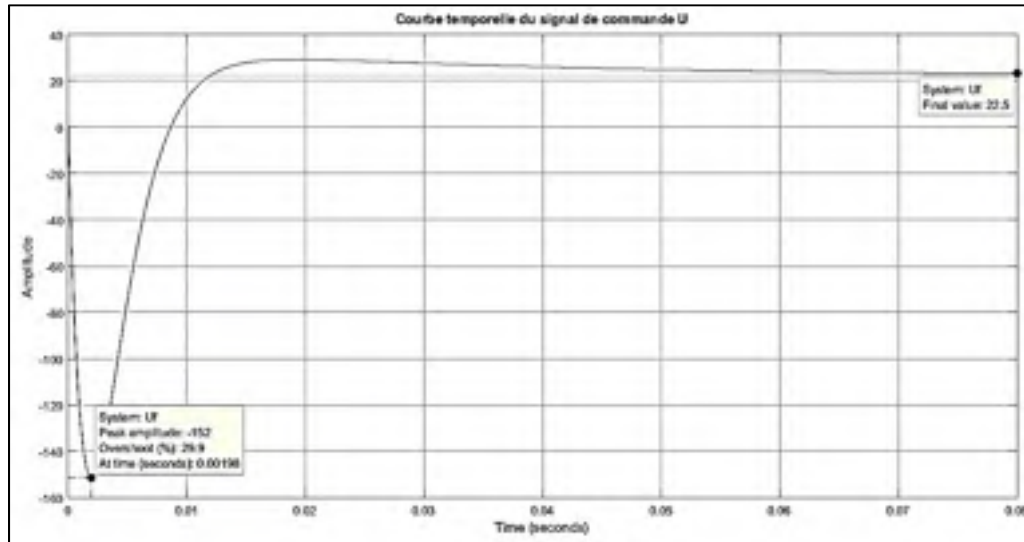


Figure 5-35 Courbe temporelle du signal de commande pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=10$

Nous vérifions encore le diagramme de Bode du compensateur B sur la Figure 5-36. On y voit la valeur pic de ce dernier à 69.2 dB qui est supérieur d'environ 20 dB comparée au cas précédent.

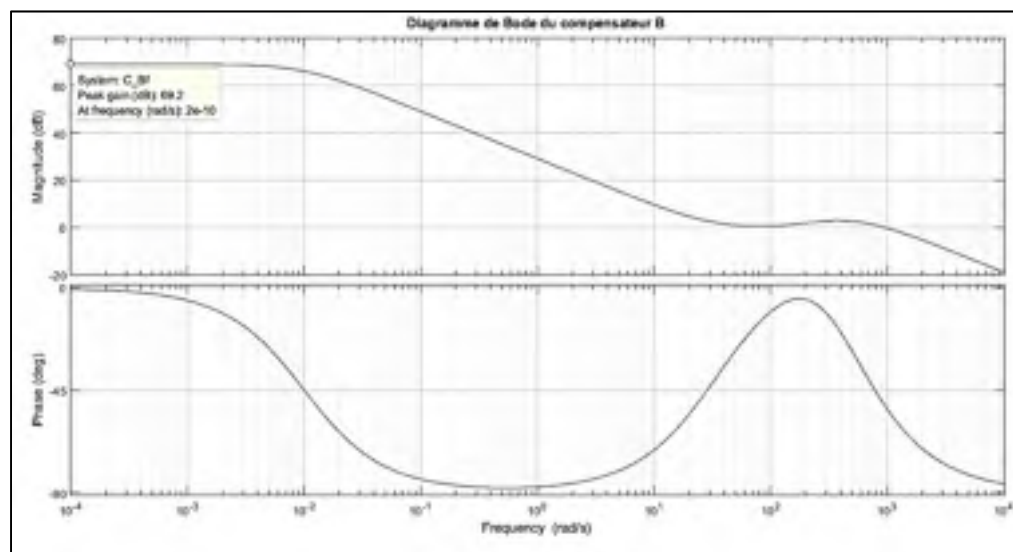


Figure 5-36 Bode du compensateur C_B pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=10$

Pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=1000$

On désire des performances temporelles supérieures et on consent pour cela une valeur maximale du signal de commande élevée de l'ordre de 1000 fois la valeur minimum. On obtient le compensateur suivant : $k=3$, $k_I=137.92$, $\omega_1=0.01$, $\omega_2=1820.52$, $\omega_b=831.11$ et $\omega_s=22.98$. On voit que les valeurs des paramètres du compensateur ont toutes augmenté ce qui permet d'atteindre des performances temporelles meilleures. On note déjà une plage de désensibilisation très importante de 22.98 rad/s. Cela assure une élimination des perturbations sur un large spectre de fréquences. On peut voir cela sur la Figure 5-37 qui montre la sensibilité du système en boucle fermée.

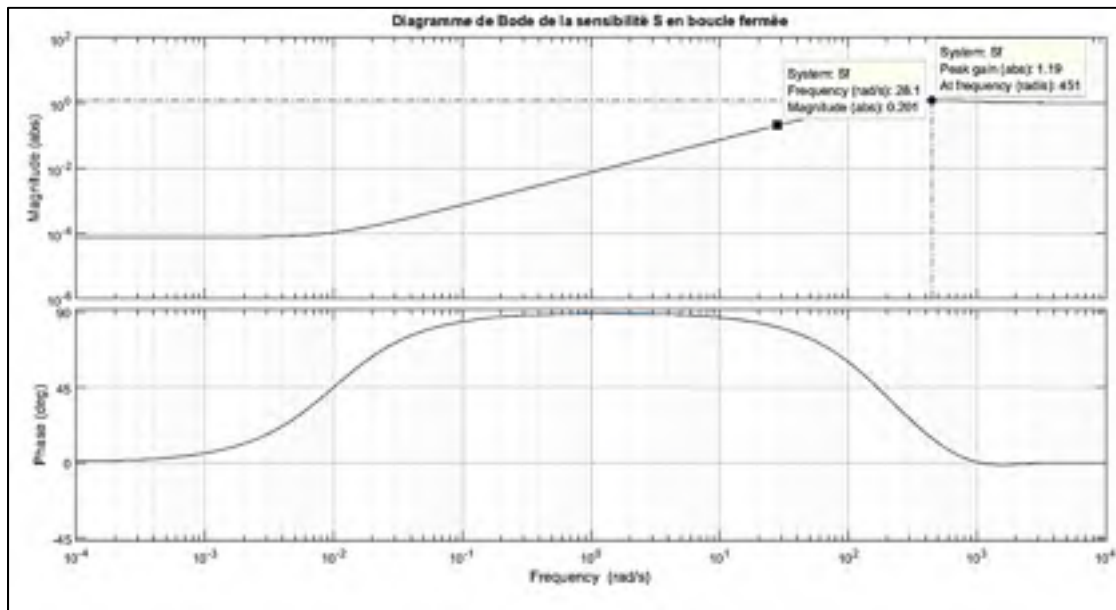


Figure 5-37 Bode de la sensibilité S pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=1000$

D'autre part, comme prévu, les performances temporelles sont grandement améliorées, comme on le voit sur la réponse à une entrée échelon du système en boucle fermée sur la Figure 5-38. En effet on voit que le temps de stabilisation est passé à 22.5 ms ce qui représente une diminution de l'ordre de 100 fois comparé au cas 1 (U_{\min}). On note toutefois que pour une augmentation du signal de commande de 10 fois, nous avons obtenus une diminution du temps de stabilisation d'un ordre de 20 fois alors que pour une augmentation du signal de commande de 1000 fois, la diminution du temps de stabilisation a été de seulement 100 fois.

Cela renseigne sur le fait que les performances temporelles tendent à une limite en dépit de l'apport de plus d'énergie de commande. Mais il est à noter aussi que la valeur pic réelle du signal de commande est souvent inférieur à la valeur pic du spectre fréquentiel. Une explication possible est que la phase transitoire du signal de commande ne contient pas forcément la fréquence de la valeur maximale du spectre fréquentiel. Donc les résultats sont toujours conservatif.

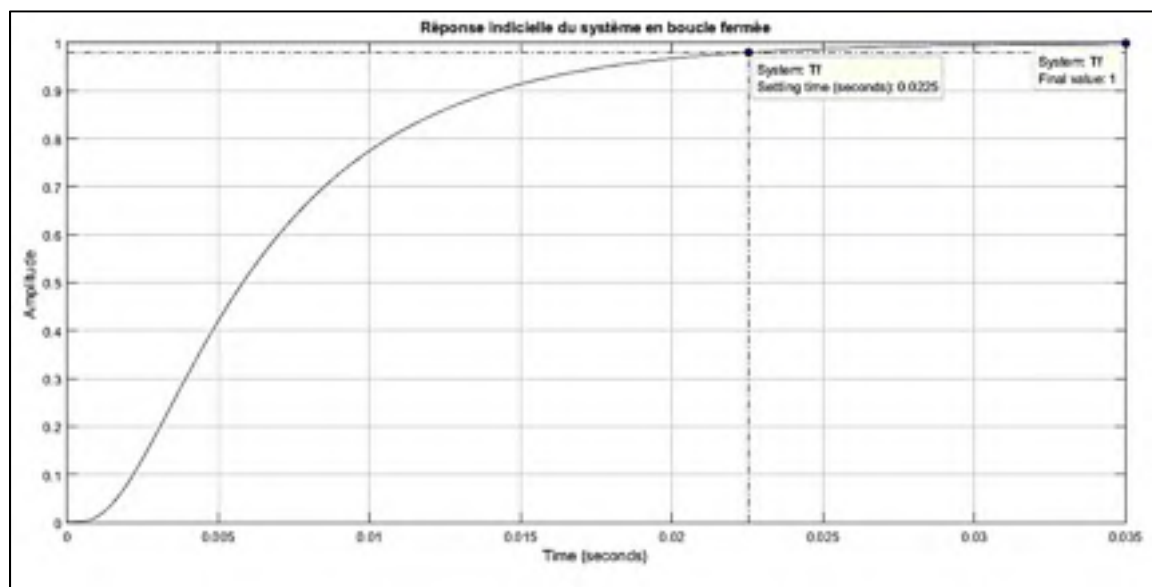


Figure 5-38 Réponse indicielle en boucle fermée pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=1000$

Enfin le diagramme de Bode du compensateur B montre que l'énergie de ce dernier augmente avec l'augmentation du signal de commande maximal, ce qui est prévisible. La Figure 5-39 montre que la valeur pic de ce dernier est de 82.8 dB.

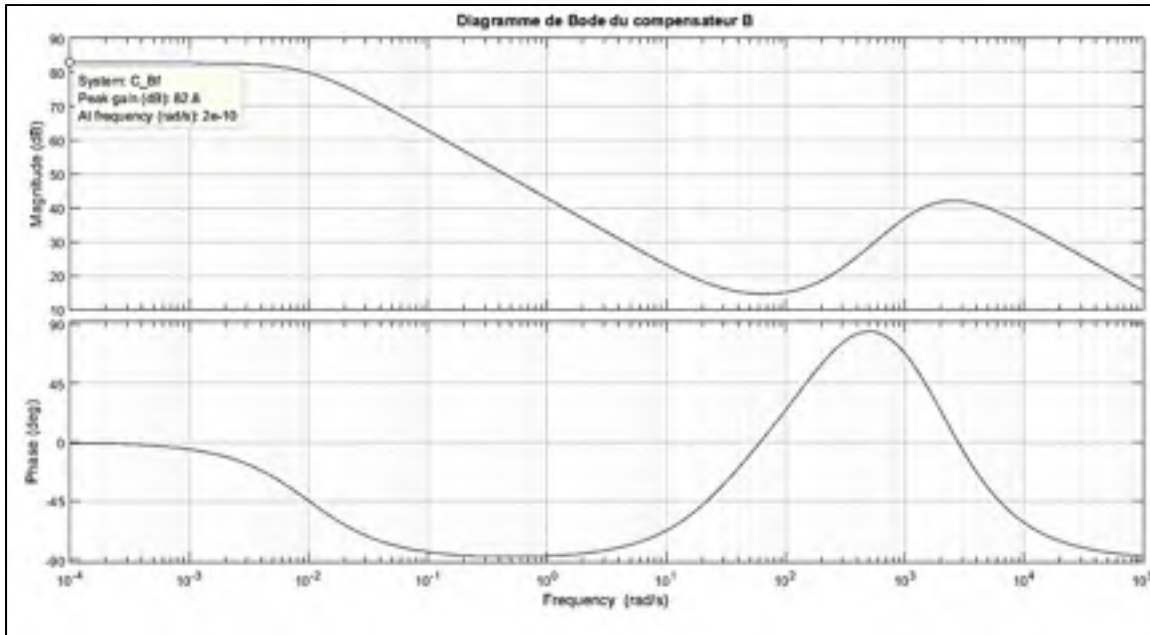


Figure 5-39 Bode du compensateur C_B pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.01$, $\gamma=1000$

5.6.2 Discussion des résultats de simulation pour u_{max}

On a vu dans cette section une construction du compensateur B guidée par le respect d'une limite de signal de commande. Cela répond à la problématique de la saturation des actionneurs et permet d'éviter d'endommager le système. Le compensateur tel que synthétisé permet d'obtenir une boucle fermée avec un signal de commande limité et qui respecte les objectifs de minimisation de la sensibilité. La relaxation de la condition sur la plage de minimisation permet d'obtenir ce résultat. En effet, dans la pratique, il appartient à l'utilisateur de fixer les compromis à faire en terme de plage de minimisation, de signal de commande et de temps de stabilisation.

Nous avons aussi vu qu'il existe une valeur minimum du signal de commande en dessous de laquelle l'erreur statique nulle n'est plus atteignable. Il est donc pertinent de considérer des valeurs de signal de commande supérieures à celle-ci pour réaliser une commande performante. D'autre part, l'augmentation de la valeur maximale du signal de commande a pour effet de réduire le temps de stabilisation et donc de rendre le système plus rapide, tout en augmentant la plage de minimisation de la sensibilité. Néanmoins, nous n'avons constaté qu'au-delà d'une

valeur du signal de commande maximal (27 fois la valeur minimale pour le cas étudié) l'effet sur le temps de stabilisation s'estompe et les valeurs de ce dernier tendent à se rapprocher d'une valeur plancher en dépit de l'augmentation du signal de commande. Cela incite le concepteur à considérer une valeur optimale selon ces besoins en balançant la réduction du temps de stabilisation avec le signal de commande.

Enfin, si cette construction permet de contrôler la valeur maximale du signal de commande, elle ne permet pas de fixer l'énergie totale du signal de commande ($\|u\|_2$) ou l'énergie consentie pour la commande (principalement $\|C_B\|_2$).

Dans la section qui suit nous étudierons le problème de l'énergie de commande. Nous proposerons une méthode pour optimiser cette dernière, et ce pour un compensateur B construit avec une valeur u_{max} précise.

5.7 Optimisation du compensateur B avec u_{max} limité :

Nous considérons dans ce qui suit le compensateur B et nous chercherons à minimiser sa norme 2 et/ou sa norme infini.

Nous savons que le compensateur B est de la forme :

$$C_B = P_s^{-1}J \quad (5.28)$$

Tel que P_s est le système stabilisé par retour d'état (et non le processus instable P). Si on pose $[p_1 \ p_2 \ p_3 \ \dots]$ comme étant les pôles désirés du système P_s alors on peut réécrire :

$$C_B = K_{ss} \frac{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \dots}{(s - z_1)(s - z_2)(s - z_3) \dots} J \quad (5.29)$$

Tel que $[z_1 \ z_2 \ z_3 \ \dots]$ sont les zéros du système instable (dont les parties réelles sont négatives par hypothèse) et K_{ss} est le gain statique qui garantit $P_s(0) = 1$.

Sachant que la partie J est paramétré pour une valeur maximale du signal de commande, l'optimisation de la norme de C_B se fera sur la partie P_s^{-1} . Nous avons établi précédemment que l'étage de stabilisation par retour d'état n'influe pas sur la boucle fermée obtenue et donc le choix du gain de retour d'état peut être choisi arbitrairement.

Nous concentrons donc notre recherche d'un gain de retour d'état qui produit une norme minimale du compensateur C_B .

Dans la perspective de ce travail nous nous limitons à une recherche itérative du gain de retour d'état sur un ensemble de valeurs du pôle stabilisé. Les étapes suivies sont :

1. Établir les paramètres de J pour assurer le signal de commande maximal u_{max}
2. Prendre une valeur initiale du pôle stabilisé ps
3. Construire le retour d'état pour cette valeur, obtenir le système stabilisé P_s
4. Construire $C_B = P_s^{-1}J$.
5. Calcul de l'énergie totale de commande $Ener = \|C_B\|_2 + \|K\|_2 + \|K_e\|_2 + \|K_r\|_2$
6. Stocker la valeur calculée et incrémenter la valeur de ps . Calculer la nouvelle valeur de l'énergie totale de commande.
7. Si cette valeur est inférieure à la valeur précédente, retenir cette valeur comme solution candidat.
8. Incrémenter ps et répéter l'étape 5, 6 et 7.
9. Afficher la courbe de l'énergie en fonction de la valeur absolue du pôle stabilisé ps
10. Affichage de la valeur optimale de ps .
11. Construire le retour d'état pour cette valeur
12. Construire la commande à double boucles et afficher les résultats : T, S, U et C_B .

Nous donnons ci-après deux exemples illustratifs pour deux valeurs de u_{max} .

5.7.1 Résultats de simulation pour u_{max} limité et compensateur B optimisé

On choisit deux valeurs significatives du signal de commande u_{max} en prenant $\gamma = 10$ et $\gamma = 1000$ pour voir l'effet de ce dernier sur l'énergie de commande et l'optimisation du compensateur B.

Pour $\varepsilon=0.2, M=1.2, \gamma=10$

Les résultats relatifs au comportement de la boucle fermée restent inchangés et ont été détaillées dans la section précédente. Nous examinons la valeur de l'énergie de commande

totale en fonction de la valeur absolue du pôle stabilisé. On peut voir sur la Figure 5-40 un agrandissement de la courbe de cette valeur autour de la valeur minimale. L'énergie consentie est importante pour les valeurs inférieures à 30 où on trouve la valeur minimale. La courbe remonte à partir de ce point pour augmenter d'une manière presque linéaire.

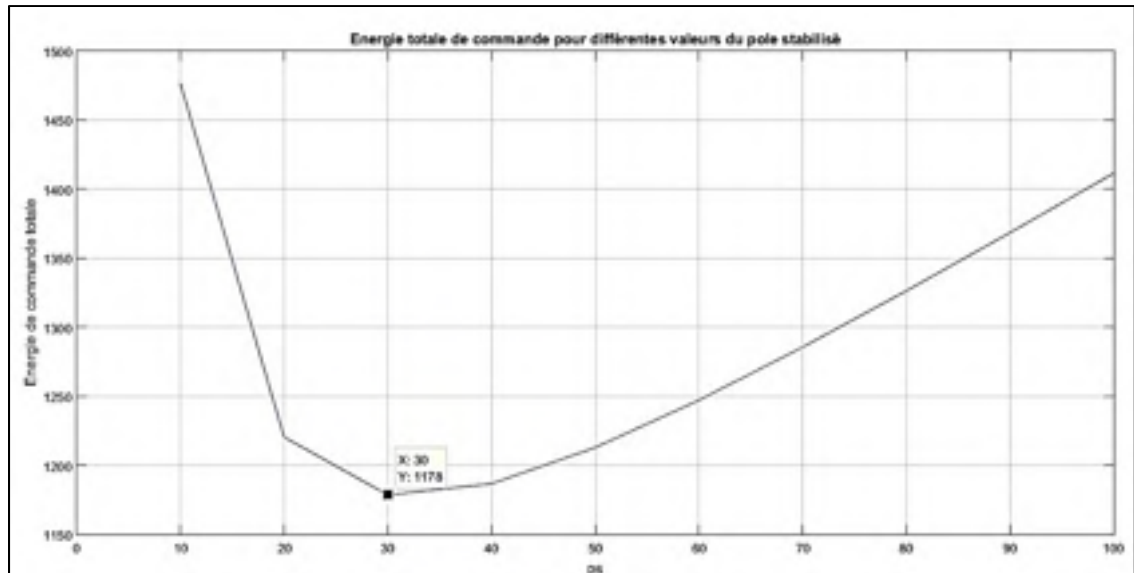


Figure 5-40 Énergie de commande totale pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=10$

Pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=1000$

Dans ce deuxième cas la pénalité sur la valeur maximal du signal de commande est relaxée et le nous obtenons un nouveau compensateur avec une énergie de commande minimale. On voit sur la Figure 5-41 la courbe de l'énergie totale de commande en fonction de la valeur absolue du pôle stabilisé. Nous nous intéressons à la région de la valeur minimale. On voit que la valeur optimal de $p_s = 550$ est élevée. Il existe donc une relation de proportionnalité entre le signal de commande maximum toléré et l'éloignement du pôle stabilisé de l'axe imaginaire.

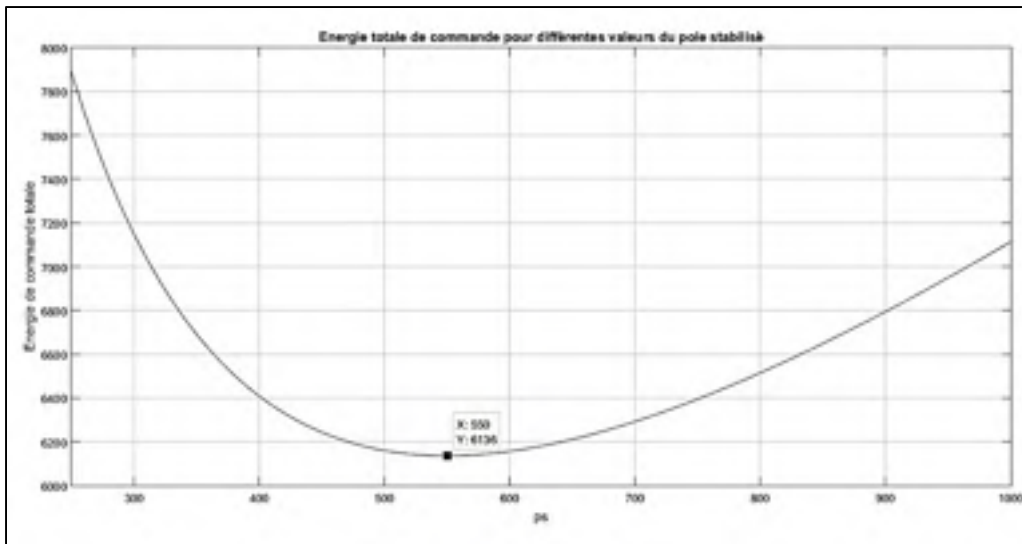


Figure 5-41 Énergie de commande totale pour $\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=1000$

5.7.2 Discussion des résultats de simulation pour u_{max} limité et compensateur B optimisé

On a vu que l'algorithme d'optimisation du compensateur B nous permet de localiser la valeur minimale de l'énergie totale de commande et donc d'obtenir le schéma à double boucles avec signal de commande limité et énergie totale de commande minimale.

Nous avons vu qu'il y avait une relation de proportionnalité entre la valeur maximale de u tolérée et l'éloignement du pôle stabilisé de l'axe imaginaire. Nous n'avons pas considéré la raison formelle de cette proportionnalité pour des considérations de limites de temps allouées à ce travail. L'algorithme est adapté au système spécifique traité dans ce mémoire, mais il peut être facilement adapté à d'autres systèmes pour peu qu'on connaisse les pôles stables et instables de ces derniers.

5.8 Ajout d'un préfiltre pour améliorer la réponse temporelle

Nous voulons améliorer la réponse temporelle du système compensé, sans affecter la limite sur le signal de contrôle où les marges de stabilité. Nous optons donc pour l'introduction d'un filtre à module unitaire. Celui-ci servira à prolonger la bande passante de la boucle fermée en

introduisant une avance de phase. Le choix du préfiltre est fait à travers une itération des paramètres de ce filtre pour obtenir le meilleur temps de stabilisation en respectant une limite de dépassement fixée par l'utilisateur. Le filtre a une fonction de transfert de la forme :

$$F = \frac{p_1 s + z_1}{z_1 s + p_1} \quad (5.30)$$

De manière qu'à $s = 0$ le filtre n'influe pas sur la valeur au régime permanent et, donc, n'introduit pas d'erreur statique. Le choix des valeurs de p_1 et z_1 est fait comme suit :

- La fréquence de la bande passante de la boucle fermée ω_{BF} est mesurée.
- Les valeurs de p_1 et z_1 sont variées de manière à maintenir le filtre centrée sur cette fréquence.
- Pour chaque paire (p_1, z_1) le filtre est appliqué à la boucle fermée et le temps de stabilisation ainsi que le dépassement sont vérifiés.
- Le filtre donnant le temps de stabilisation le plus petit tout en respectant la limite de dépassement permis est retenu.

Nous appliquons à titre d'illustration l'algorithme avec préfiltre au cas ($\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=10$) et nous comparons les réponses temporelles avec et sans préfiltre. Nous spécifions que nous désirons un dépassement temporel de moins de 1%. L'algorithme nous donne le préfiltre :

$$F = 1.7778 \frac{s + 33.8}{s + 60.09} \quad (5.31)$$

La Figure 5-42 montre la comparaison entre la boucle fermée sans filtre (en bleu) et avec filtre (en rouge).

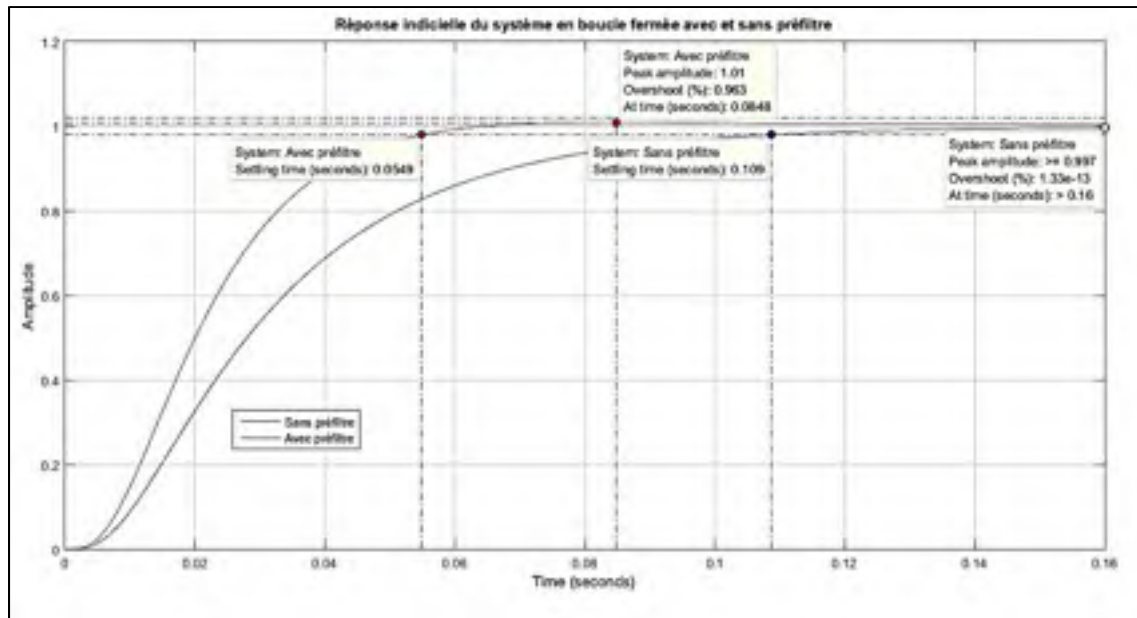


Figure 5-42 Effet de l'application du préfiltre sur le système compensé

On voit que le temps de stabilisation est passé de 109 ms à 57.9 ms, donc réduit de moitié. D'autre part l'erreur statique du système est restée nulle, alors que le dépassement introduit par le préfiltre est de seulement 0.963 % qui est en dessous de la limite que nous avons fixé à l'algorithme. Il est clair que, pour des valeurs de dépassement supérieures, le temps de stabilisation peut être encore plus réduit.

5.9 Récapitulation des résultats de simulation

Nous résumons dans le Tableau 5-1 les résultats obtenus pour les différents cas traités dans ce chapitre.

Tableau 5-1 Récapitulatif des résultats de simulation de la compensation à double boucle

	u_{max} , ω_2 non limités et ω_s fixe				u_{max} limité et ω_s variable				u_{max} limité et	u_{max} limité, énergie		
									énergie optimisée	optimisée et préfiltre		
ω_s pour ε	$\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$, $PM=50^\circ$	$\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=10$, $PM=50^\circ$	$\varepsilon=0.4$, $M=1.2$, $\omega_s=20$, $PM=50^\circ$	$\varepsilon=0.2$, $M=1.4$, $\omega_s=20$, $PM=50^\circ$	$\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\omega_s=20$, $PM=70^\circ$	$\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=1$	$\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=10$	$\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=1000$	$\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=10$	$\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=1000$	$\varepsilon=0.2$, $M=1.2$, $\gamma=10$	
	24.3	12.2	29.9	24.4	24.3	0.381	5.81	28.1	5.81	28.1	5.81	
	U_{max} (dB)	94.7	76.7	80.7	85.4	107	27	46.8	87.1	46.8	87.1	46.8
	S_{max}	1.1	1.1	1.1	1.17	1.1	1.01	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19
$ C _{B_{max}}$ (dB)	81.6	75.6	76.9	81.6	81.6	45.32	69.2	82.8	69.1	82.8	69.1	
Temps de stabilisation t_s (ms)	29.5	58.9	50.5	26.8	31.1	2009.00	108	22.5	108	22.5	57.9	
Dépassement en %	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Marge de gain GM (dB)	27	27	27	22.4	33.2	45.9	21.4	21.4	21.4	21.4	21.4	
Marge de phase PM (deg)	83.2°	83.2°	83.2°	78.5°	86.7°	89.6°	77.1	77.1	77.1	77.1	77.1	

On voit que :

- le temps de sensibilisation est proportionnel à la sensibilité ε et inversement proportionnel à la plage de minimisation de la sensibilité ω_s .
- la sensibilité maximale M n'influe pas sensiblement sur les performances temporelles du système compensé en boucle fermée. La valeur de M est importante dans l'optique du rejet des perturbations.
- La norme maximale du compensateur B est plus importante pour des conditions plus strictes sur les limites de sensibilité
- Les différents paramètres et conditions de synthèse de la commande à double boucle influe peu sur les marges de stabilité. Le schéma de commande offre des marges de gain et de phase confortables pour tous les cas étudiés.
- Dans le cas d'un signal de commande limité, on note que le temps de stabilisation est inversement proportionnel à l'énergie investie dans le signal de commande. Les grandes valeurs de signal de commande conduisent à un système très rapide.
- La valeur pic du compensateur B est proportionnelle à la valeur maximale du signal de commande.
- Dans tous les cas étudiés, le système compensé ne présente pas d'oscillations ni de dépassement.

CHAPITRE 6

COMPARAISON DES PERFORMANCES AVEC LES AUTRES METHODES DE COMPENSATION

6.1 Méthodes de compensation et critères de comparaison

Nous nous proposons dans cette section de comparer les performances de l'algorithme de la méthode B à double boucle avec d'autres méthodes de compensation usitées. Nous avons choisi trois méthodes pour ce travail :

- Le retour d'état optimal avec estimation de l'état LQG
- La commande H_∞ pour le problème de double sensibilité (*mixed sensitivity*)

Nous avons choisi ces méthodes car elles présentent de bons résultats en termes de réduction de la sensibilité et de d'amélioration des performances.

Nous ne détaillerons pas dans ce qui suit la théorie derrière ces méthodes, la littérature à ce sujet étant disponible, pour permettre de concentrer notre intérêt sur les résultats.

L'application de la compensation se fera sur Matlab à l'aide de fonction disponibles et de l'algorithme développé dans ce travail.

Pour comparer les méthodes, nous prenons deux cas : signal de commande très petit et temps de stabilisation très petit. Nous essaierons d'obtenir des compensateurs qui répondent à ces critères pour chaque cas et nous comparons les résultats dans des tableaux. Les critères de comparaison sont : temps de stabilisation, dépassement temporel, marges de stabilité, signal de commande, énergie de commande.

Pour le compensateur LQG, on utilise la fonction *lqg* de Matlab, alors que pour le compensateur H_∞ nous utilisons la fonction *mixsyn* qui construit le compensateur H_∞ pour le cas du problème de double sensibilité.

6.2 Cas 1 : Signal de commande très petit

Dans ce cas nous voulons obtenir la stabilisation du système ainsi que les meilleures performances possibles avec un signal de commande minimal. Le critère de conception est donc le signal de commande u .

Dans le cas de l'algorithme à double boucle et du compensateur H_∞ , il s'agit de fixer une valeur maximale de signal de commande à ne pas dépasser. Dans le cas du LQG, il s'agit de fixer une pénalité importante sur le signal de commande pour obtenir la solution optimale qui favorise un signal de commande minimal.

Nous fixons le signal de commande minimum à $U_{min}=22.5$ et pour le compensateur LQG nous fixons la pondération R à la valeur $??$. Nous obtenons les résultats suivants.

6.2.1 Compensateur LQG :

Les paramètres du compensateur sont fixés de manière à obtenir le signal de commande minimum et nous observons les résultats.

La Figure 6-1 montre le signal de commande introduit en entrée au système.

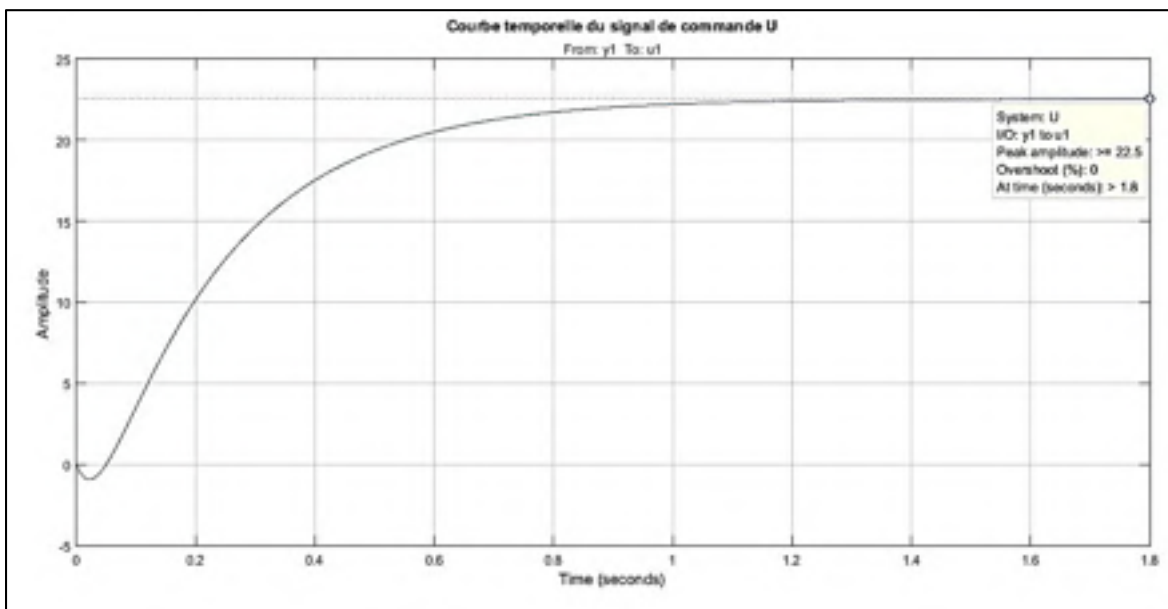


Figure 6-1 Courbe temporelle du signal de commande pour LQG, Cas 1

On voit que la valeur pic du signal de commande est 22.5 que nous avons déjà identifié comme le signal minimum nécessaire. Cela confirme que c'est bien le compensateur avec signal de commande minimum.

La sensibilité du système en boucle fermée atteint un maximum de 1.17 comme on peut le voir sur la Figure 6-2. La sensibilité est maintenue en dessous de 0.2 pour les fréquences inférieures à 0.68 rad/s.

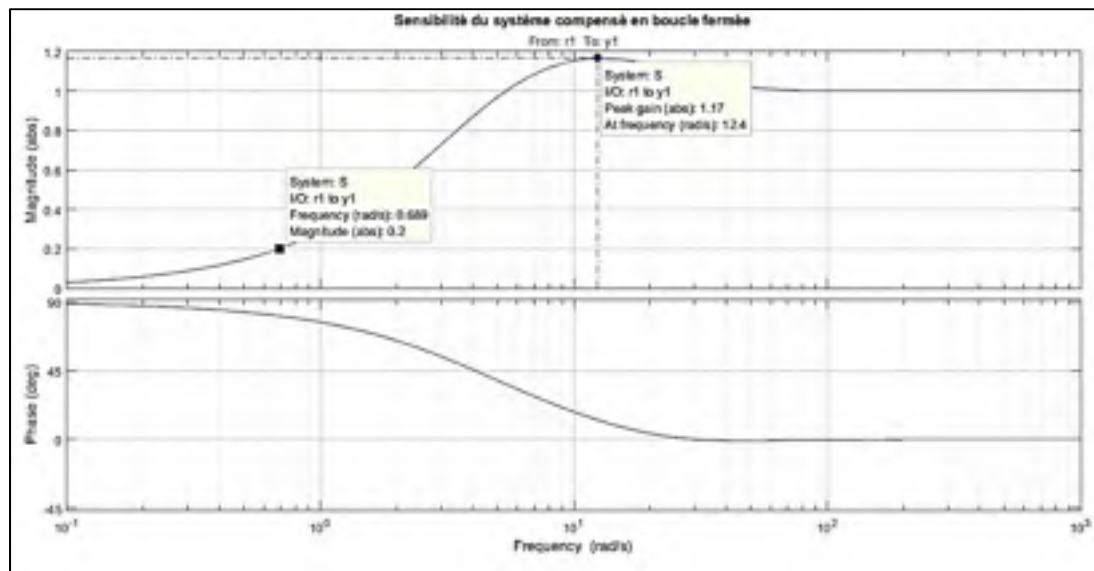


Figure 6-2 Bode de la sensibilité S pour LQG, Cas 1

On peut voir la réponse temporelle du système à une entrée échelon à la Figure 6-3. On peut constater qu'il n'y a pas de dépassement temporel, la réponse ne présente aucune oscillation. Le temps de stabilisation de 944 ms est assez important, ce qui est prévisible en regard de l'effort minimal de compensation.

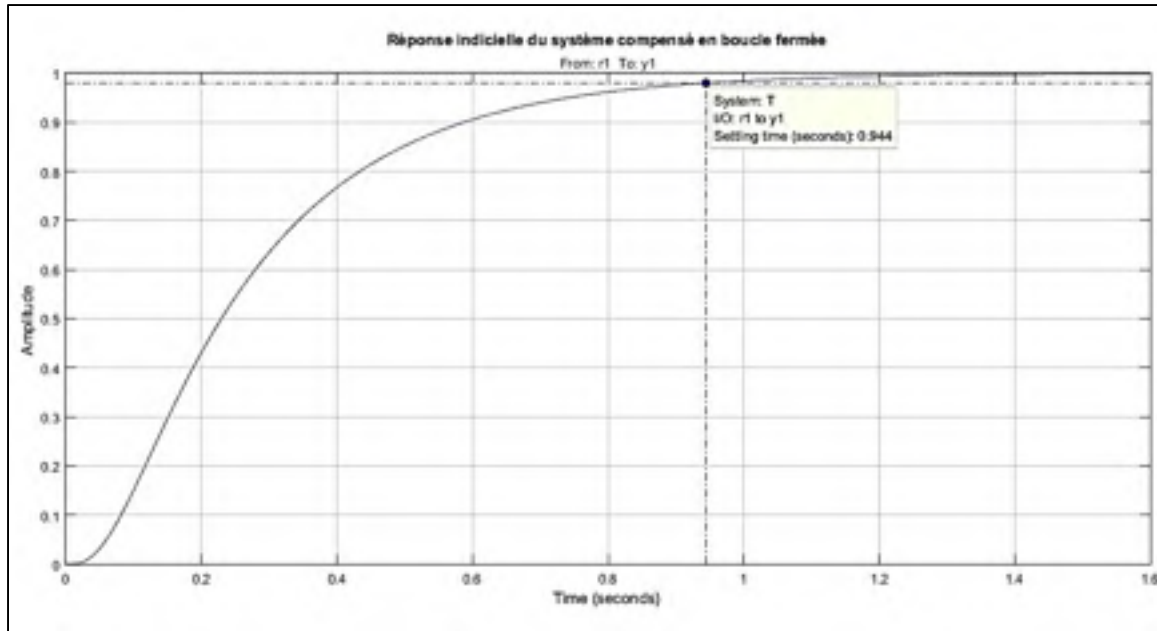


Figure 6-3 Réponse indicielle du système compensé en boucle fermée pour LQG, Cas 1

6.2.2 Compensateur H_∞

De manière à produire un compensateur qui respecte les mêmes valeurs, nous utilisons la valeur limite de signal de commande 22.5 comme critère de synthèse en plus de la limite de sensibilité grâce aux fonctions de pondération $W1$ et $W3$ et d'une valeur maximale constante pour $W2$ de la fonction *mixsyn*. Il est à noter que la procédure pour obtenir le compensateur voulu n'est pas triviale et repose sur un choix judicieux des pondérations $W1$ et $W3$. Plusieurs essais et corrections sont nécessaires pour finalement obtenir un résultat satisfaisant.

Pour nous aider dans cette tâche, nous implémentons un algorithme inspiré de (Donha et Katebi, 2007). Le programme sous Matlab est listé en ANNEXE III. L'algorithme nous donne les fonctions de pondération suivantes :

$$W_1(s) = \frac{5.960 \times 10^{-8}s + 4.31}{s + 2.569 \times 10^{-8}}$$

$$W_3(s) = \frac{s + 8.389 \times 10^8}{s + 1.678 \times 10^9}$$
(6.1)

On obtient alors la boucle fermée avec les caractéristiques montrées dans les figures ci-dessous.

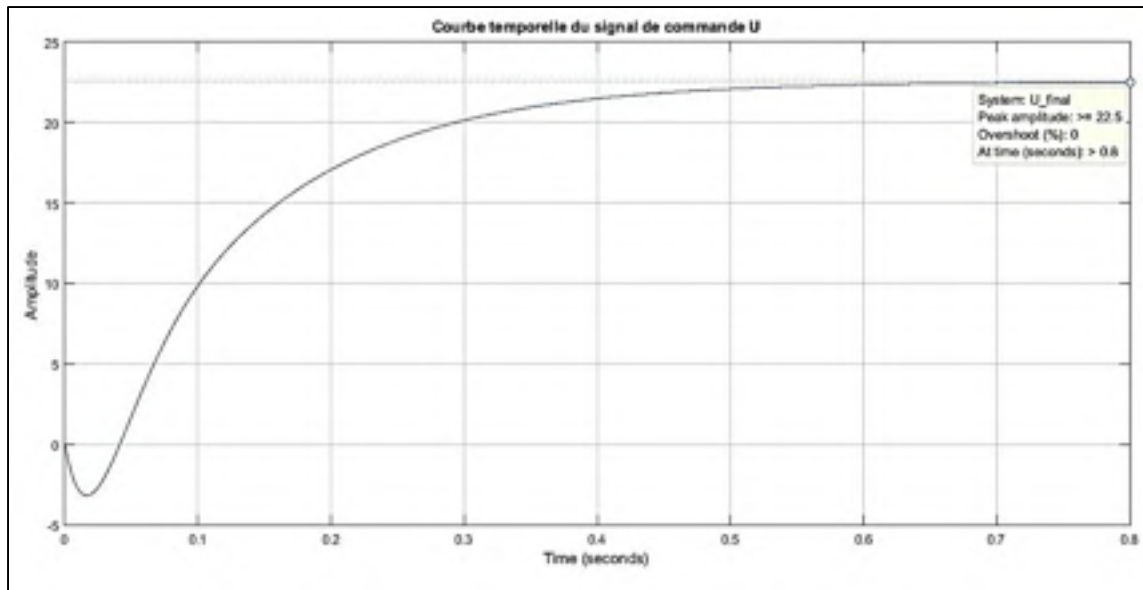


Figure 6-4 Courbe temporelle du signal de commande pour H_∞ , Cas 1

On voit à la Figure 6-4 que le signal de commande est effectivement limité à la valeur minimale de 22.5.

À la Figure 6-5 on voit que la sensibilité maximale atteinte est 1.19 et que pour les fréquences inférieures à 1.25 rad/s la sensibilité est inférieure à 0.2.

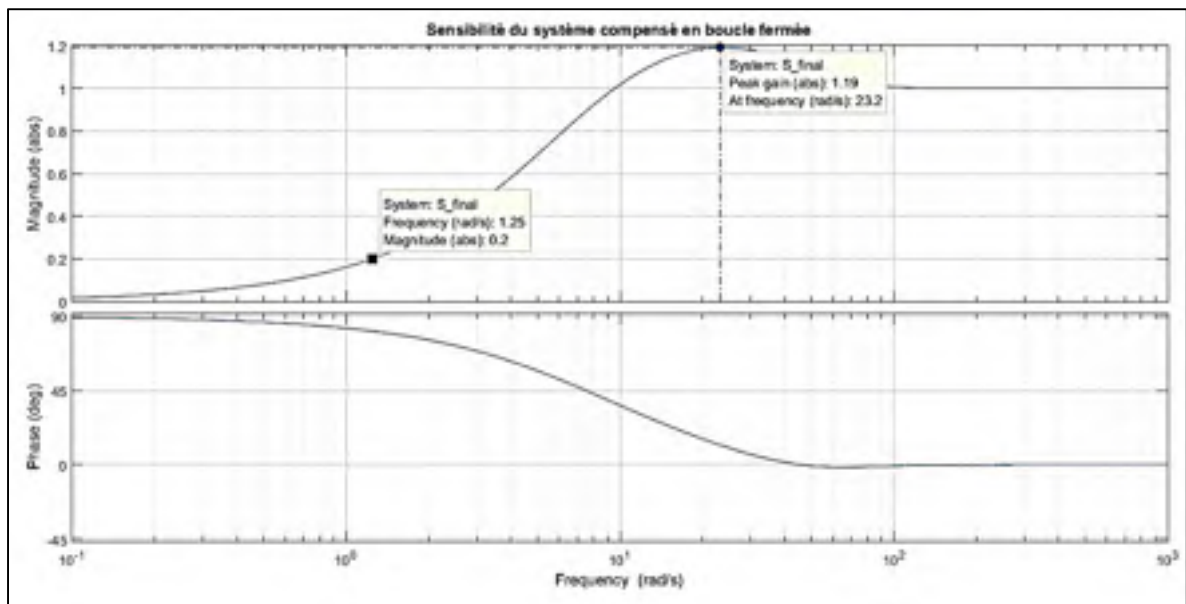


Figure 6-5 Bode de la sensibilité S pour H_∞ , Cas 1

Enfin, la Figure 6-6 montre la réponse à une entrée échelon du système compensé en boucle fermée. On voit qu'il n'y a pas d'erreur statique, en outre, le temps de stabilisation est de 518 ms.

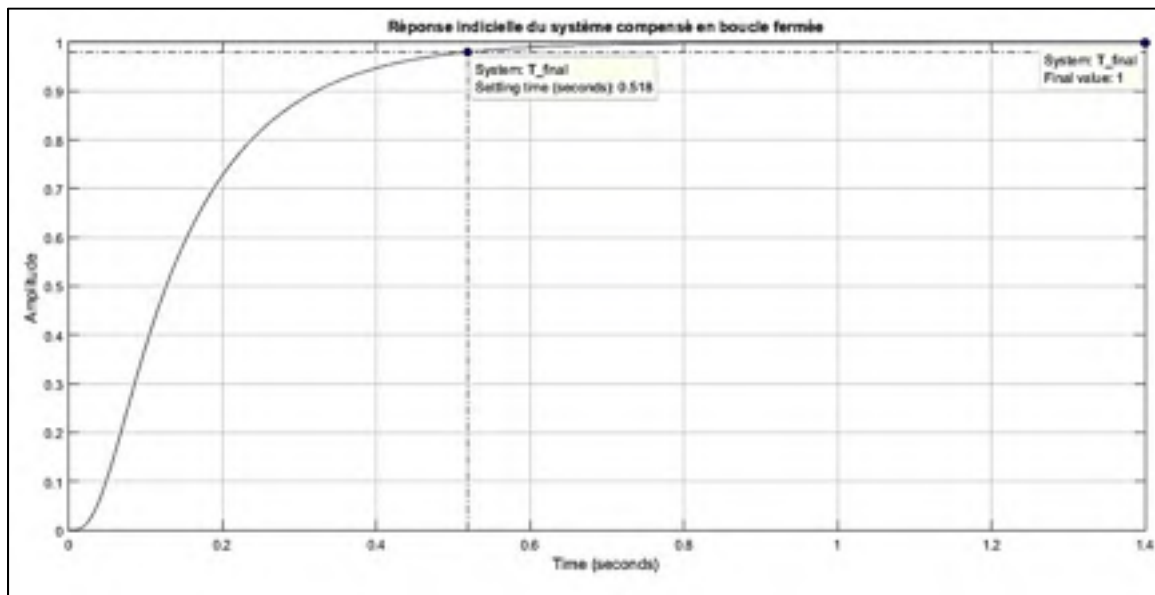


Figure 6-6 Réponse indicielle du système compensé en boucle fermée pour H_∞ , Cas 1

6.2.3 Méthode B à double boucle

Nous fixons les mêmes conditions sur le signal de commande à savoir la valeur maximale de 22.5. Nous obtenons le compensateur à double boucle et préfiltre conservateur à l'aide de l'algorithme implémenté sur Matlab. Ce résultat est conservateur en termes de sensibilité, comme nous l'avons déjà vu dans la section 5.6.1, et un résultat, où la condition sur la sensibilité maximale est relaxée, est donné par la méthode visuelle décrite en ANNEXE I. Nous montrons ici les résultats de l'algorithme Matlab seulement.

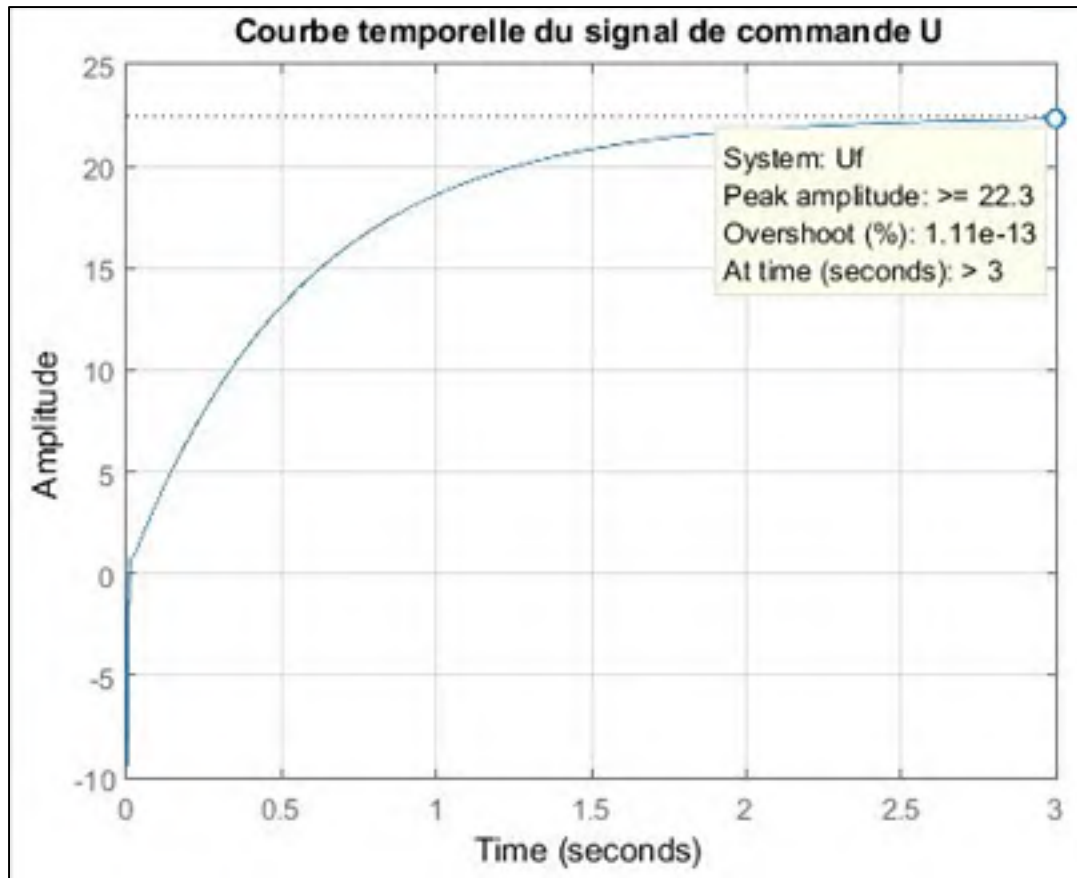


Figure 6-7 Courbe temporelle du signal de commande pour double boucle, Cas 1

La figure Figure 6-7 montre la courbe temporelle du signal de commande. Comme dans les deux autres méthodes, la méthode B à double boucle assure un signal de commande inférieur à 22.5. La Figure 6-8 montre que la sensibilité maximale atteinte est 1.01, très inférieure aux valeurs obtenues par les autres méthodes. La valeur de la sensibilité est inférieure à 0.2 pour les fréquences inférieures à 0.36 rad/s.

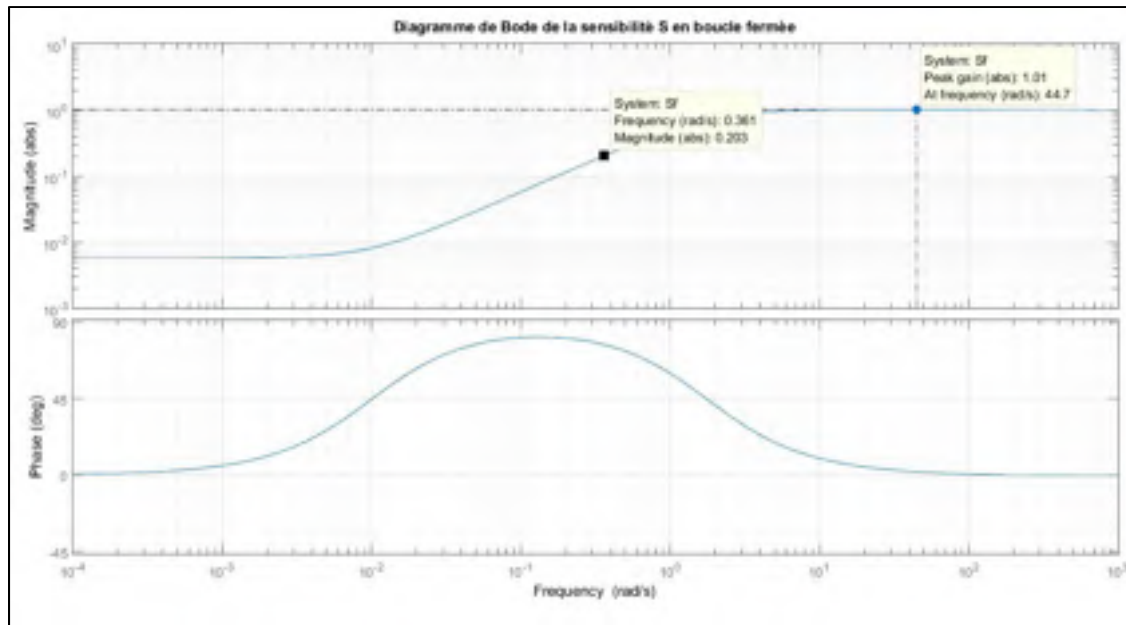


Figure 6-8 Bode de la sensibilité S pour double boucle, Cas 1

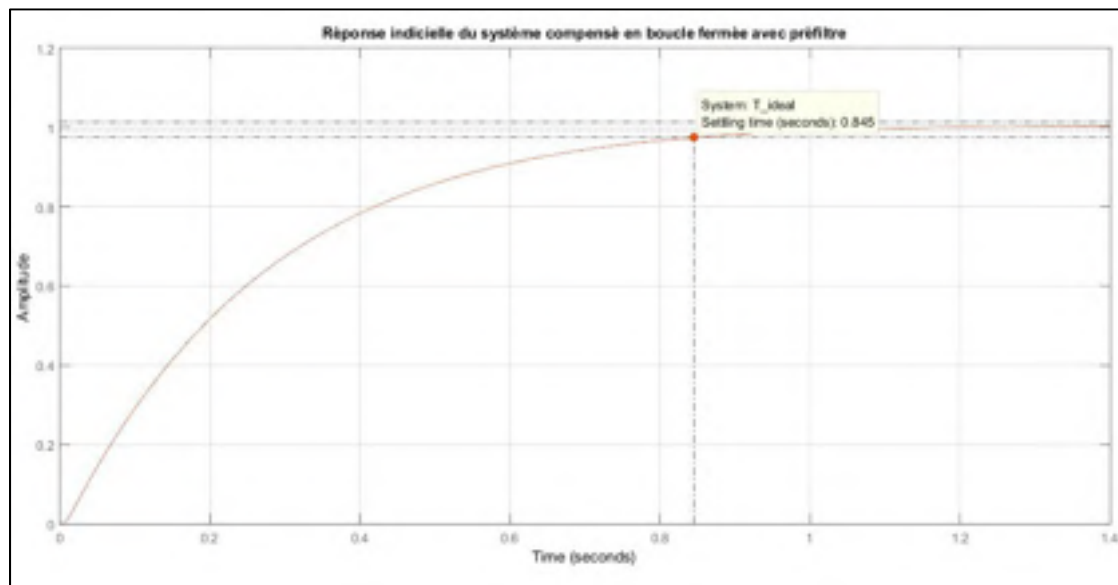


Figure 6-9 Réponse indicielle du système compensé en boucle fermée pour double boucle, Cas 1

Finalement, on peut voir que le temps de stabilisation du système compensé en boucle fermée est de 845 ms.

6.2.4 Résumé du cas 1 : signal de commande très petit

On peut résumer les résultats des trois méthodes dans le tableau ci-dessous

Tableau 6-1 Comparaison des trois méthodes, Cas 1

	LQG	H_∞	Double Boucle B
U_{\max}	22.5	22.5	22.5
S_{\max}	1.17	1.19	1.01
Plage de désensibilisation pour $ S =0.2$	0.689	1.25	0.36
Temps de stabilisation t_s (s)	0.944	0.518	0.845
Dépassement en %	0	0	0
Marge de gain GM (dB)	∞	20.1	45.9
Marge de phase PM (deg)	> 68	78	89.6

6.3 Cas 2 : Temps de stabilisation très petit

Dans ce cas, nous voulons obtenir le système le plus rapide tout en gardant la sensibilité limitée et éviter un dépassement temporel trop important.

6.3.1 Compensateur LQG :

Les résultats obtenus sont montrés dans les figures ci-dessous :

On voit que le compensateur LQG arrive à donner un temps de stabilisation de 148 ms mais cela au coût d'un dépassement temporel de 5%. Si l'on désire des temps de stabilisation plus petits il en résulte forcément des dépassements plus importants. La sensibilité maximale est 1.47, une valeur importante si l'on désire réduire les perturbations sur le système. La valeur du signal de commande reste quant à elle modérée.

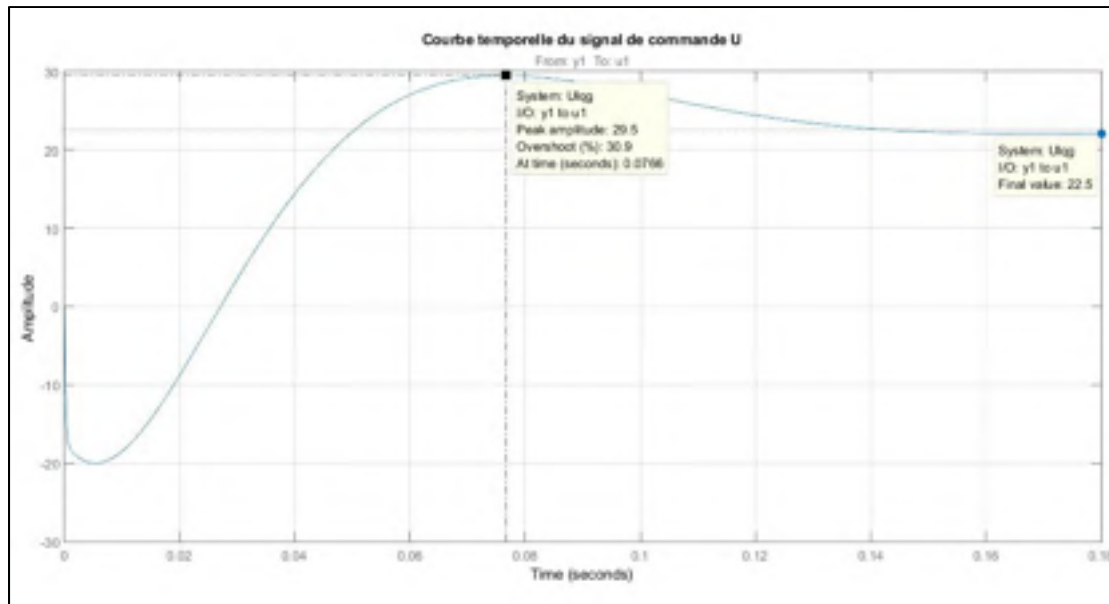


Figure 6-10 Courbe temporelle du signal de commande pour LQG, Cas 2

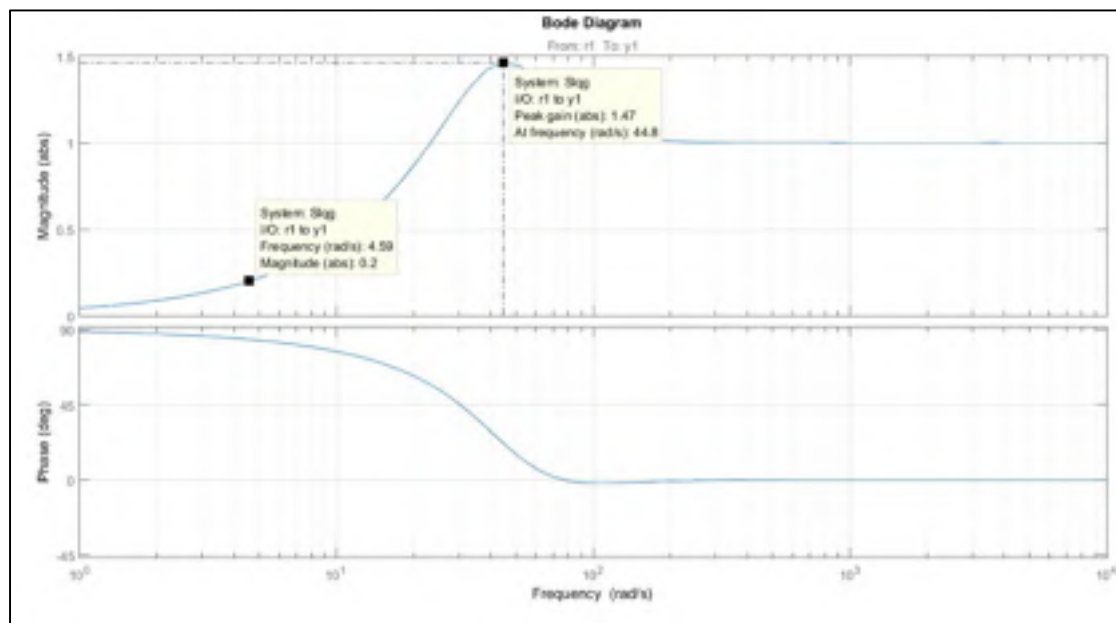


Figure 6-11 Bode de la sensibilité S pour LQG, Cas 2

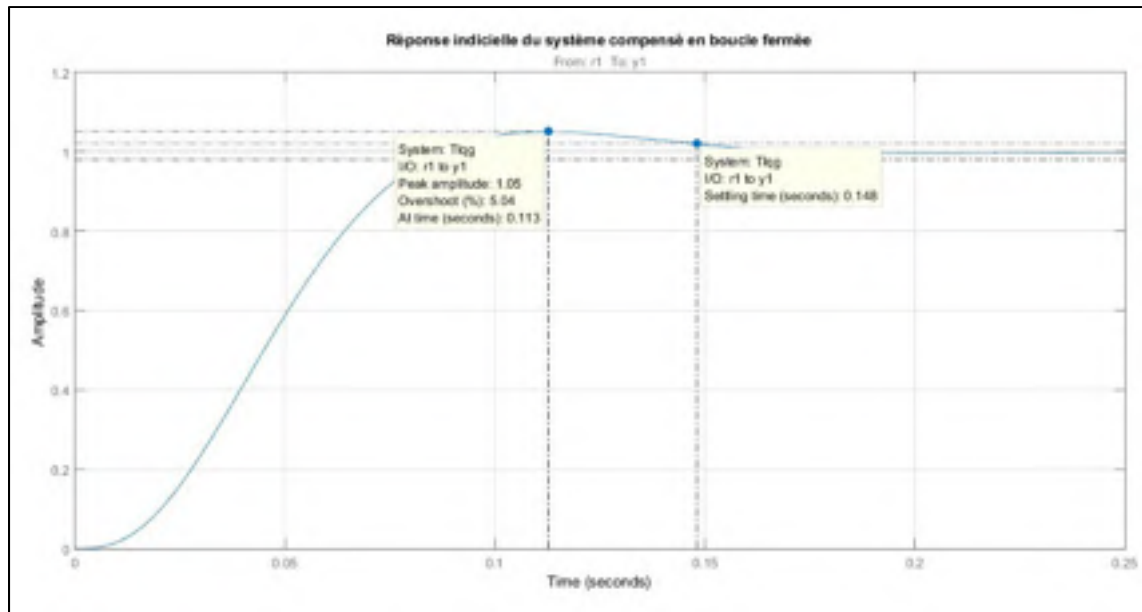


Figure 6-12 Réponse indicielle du système compensé en boucle fermée pour LQG, Cas 2

6.3.2 Compensateur H_∞

Nous choisissons les fonctions de pondération pour obtenir un système rapide mais sans pour autant exagérer la valeur du signal de commande. On obtient les fonctions de pondération suivantes :

$$W_1(s) = \frac{0.25s + 10}{s + 0.25}$$

$$W_3(s) = \frac{s + 200}{s + 400}$$
(6.2)

Les résultats de la boucle fermée sont donnés dans les figures suivantes :

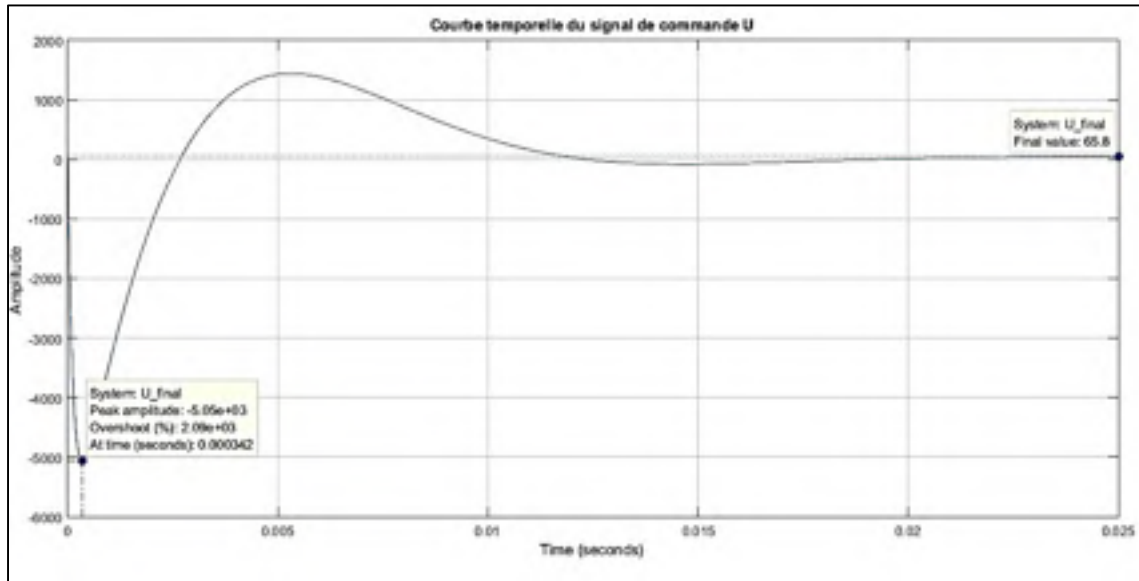


Figure 6-13 Courbe temporelle du signal de commande pour H_∞ , Cas 2

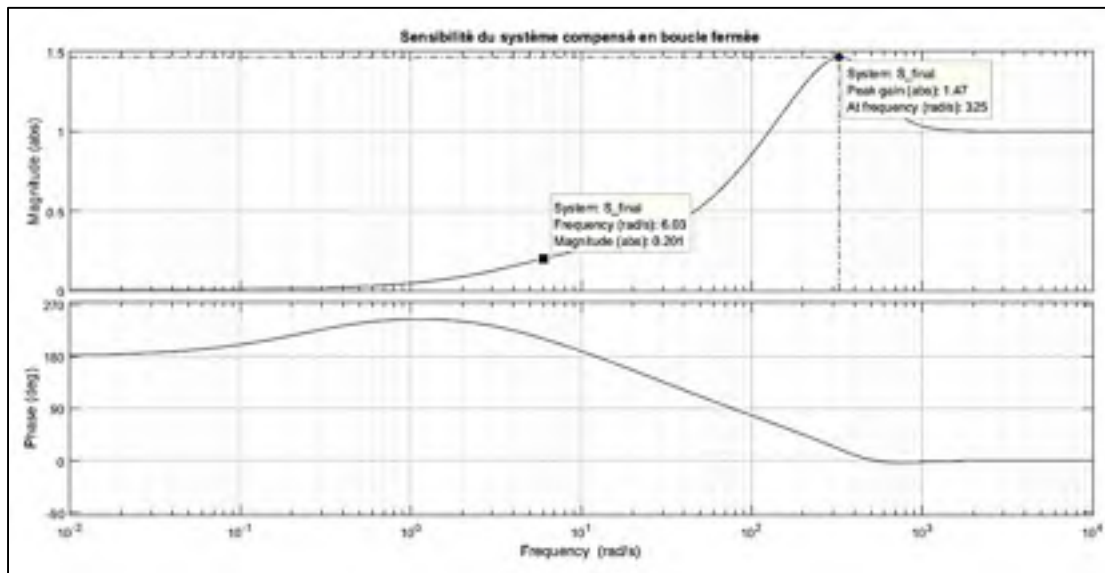


Figure 6-14 Bode de la sensibilité S pour H_∞ , Cas 2

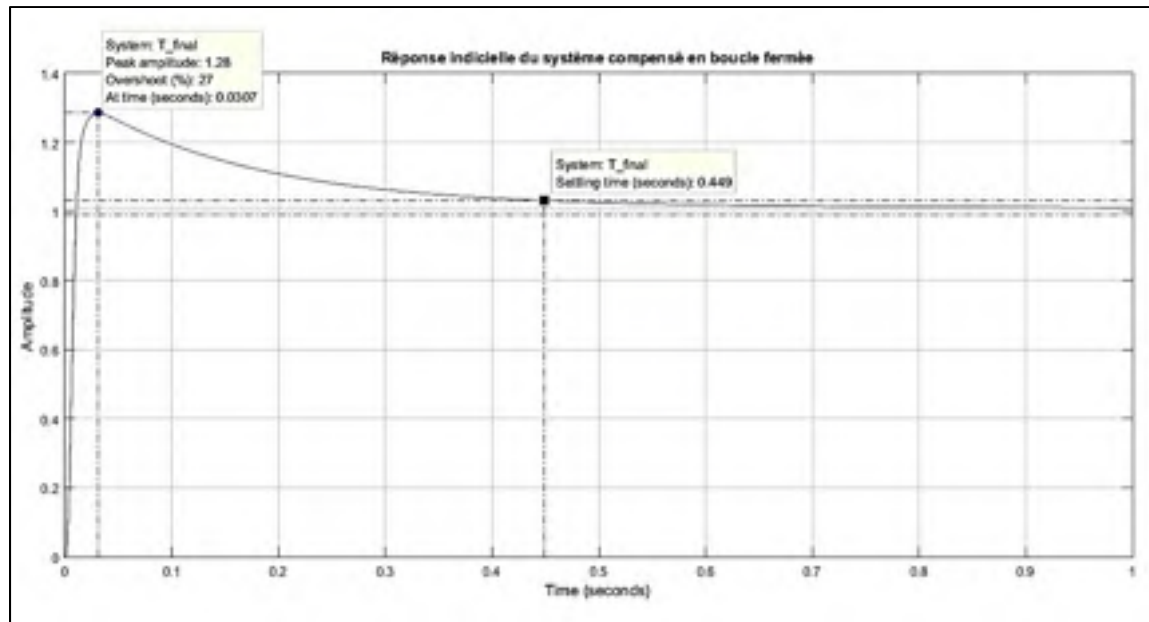


Figure 6-15 Réponse indicielle du système compensé en boucle fermée pour H_∞ , Cas 2

On voit que la valeur du signal de commande est plus importante dans le ce cas comparé au compensateur LQG. La sensibilité maximale est la même à 1.47. La plage de minimisation de la sensibilité à 0.2 est plus large néanmoins.

Le temps de stabilisation est de 449 ms, ce qui est de l'ordre de quatre fois le cas LQG avec un dépassement temporel de 27%.

La difficulté du choix des fonctions de pondération fait que ce compensateur n'est pas forcément le plus optimisé à ce cas. Cela met en évidence la difficulté de synthèse du compensateur H_∞ .

6.3.3 Méthode B à double boucle

Nous fixons les limites de sensibilité à $M = 1.2$ et $\varepsilon = 0.2$. D'autre part nous laissons la valeur du signal de commande aller jusqu'à $10^3 \times U_{\min} = 22\,550.52$. Nous obtenons les résultats suivants :

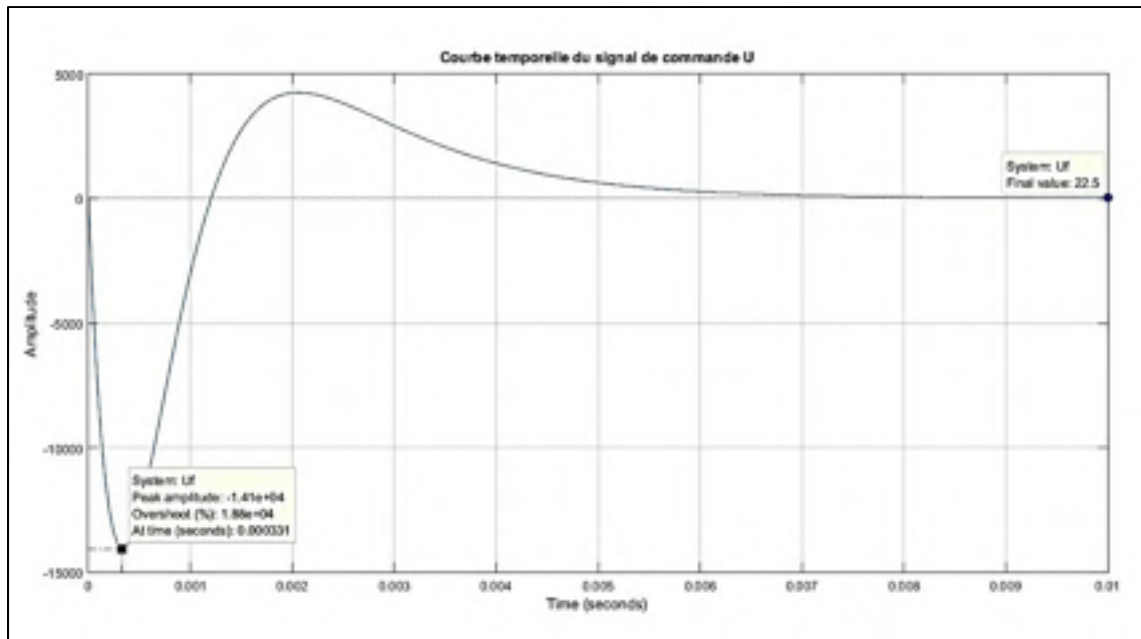


Figure 6-16 Courbe temporelle du signal de commande pour double boucle, Cas 2

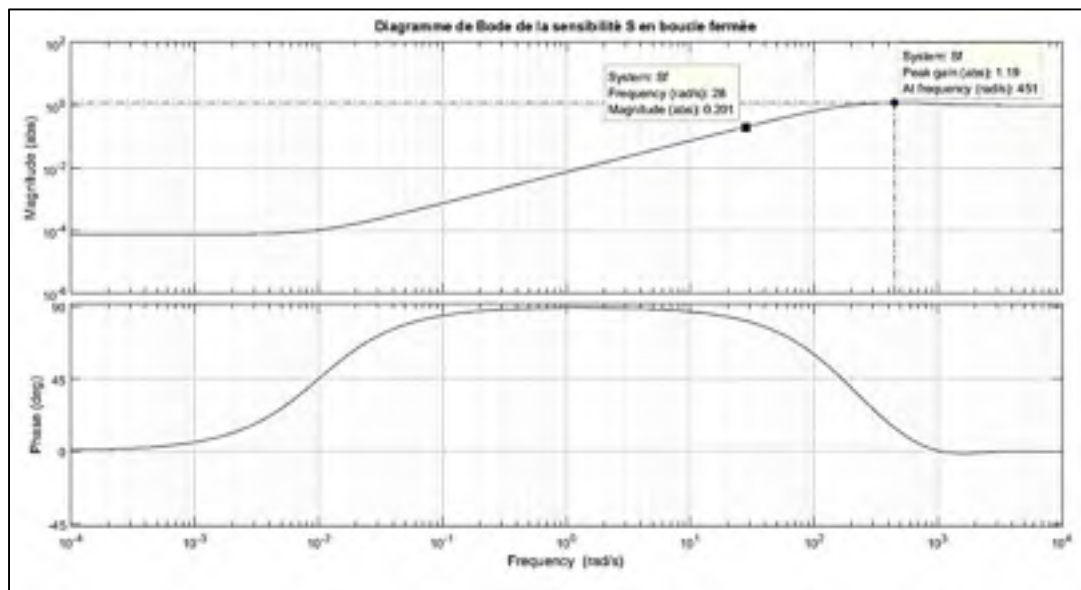


Figure 6-17 Bode de la sensibilité S pour double boucle, Cas 2

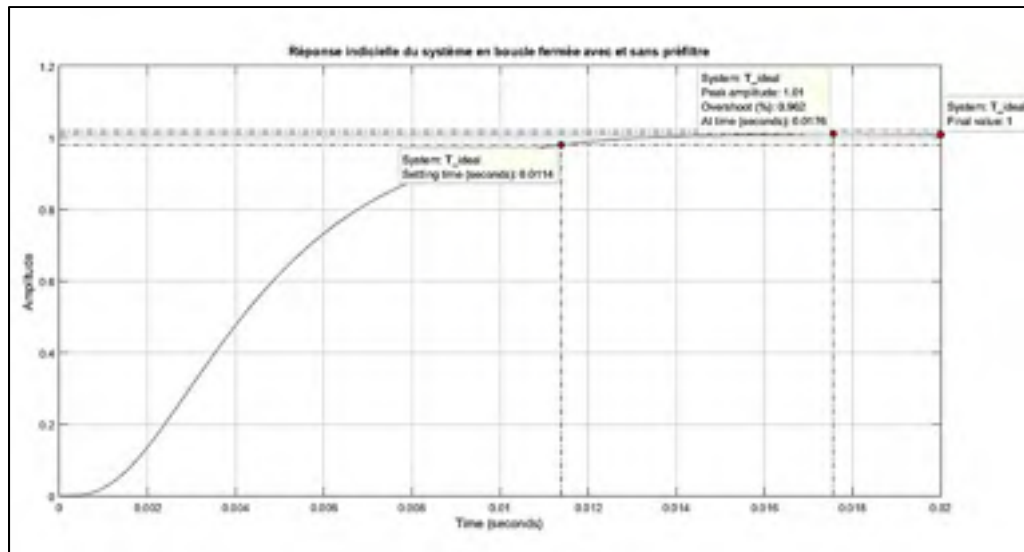


Figure 6-18 Réponse indicielle du système compensé
en boucle fermée pour double boucle, Cas 2

On voit que la condition sur la valeur maximale du signal de commande est respectée. La sensibilité maximale est de 1.19 alors que la plage de minimisation de la sensibilité est de 28 rad/s. Le temps de stabilisation est de 11.4 ms alors que le dépassement temporel est seulement de 0.9%. Les performances du schéma à double boucle, lorsque la pénalité sur le signal de commande est réduite, sont nettement supérieures à celles des autres méthodes.

6.3.4 Résumé du cas 2 : temps de stabilisation très petit

Tableau 6-2 Comparaison des trois méthodes, Cas 2

	LQG	H_∞	Double Boucle B
U_{\max}	29.5	5×10^3	1.41×10^4
S_{\max}	1.47	1.47	1.19
Plage de désensibilisation pour $ S =0.2$ (rad/s)	4.59	6.03	28
Temps de stabilisation t_s (s)	0.148	0.449	0.0114
Dépassement en %	5.04	27	0.962
Marge de gain GM (dB)	∞	13.3	21.4
Marge de phase PM (deg)	> 68	55.9	77.1

CONCLUSION

La commande d'un système de lévitation magnétique au moyen d'un schéma à double boucle a été étudiée dans ce travail. Le système instable est stabilisé par une première boucle de retour d'état, puis le système stabilisé est compensé par un compensateur à retour de sortie. Ce dernier est synthétisé selon une version modifiée de l'algorithme B pour système stables et qui est basé sur le théorème de D. Bensoussan (Bensoussan, 1984a).

L'algorithme permet de synthétiser les paramètres du retour d'état et du compensateur B de manière à respecter une valeur de signal de commande maximale à ne pas dépasser, minimiser la sensibilité sur les basses fréquences et fixer une sensibilité maximale tolérée sur le spectre fréquentiel. Le schéma de commande synthétisé est aussi celui qui investit l'énergie de commande minimale.

Les performances du nouveau schéma de commande est testé pour plusieurs cas et présente des résultats satisfaisant en termes de temps de stabilisation, de marges de stabilité. Le système en boucle fermée présente une réponse temporelle sans oscillations ni dépassement et ce, même pour des valeurs importantes du gain de compensation.

Les performances de ce schéma de commande sont comparées à d'autres méthodes de compensation appliquées au système de lévitation. L'algorithme proposé donne des résultats supérieurs aux autres méthodes, tout en offrant au concepteur un contrôle précis des conditions de synthèse (signal de commande, énergie, sensibilité).

Certaines suppositions sont utilisées dans la synthèse du compensateur sans qu'une preuve formelle soit apportée. Les résultats de simulation pour différents cas montrent que ces suppositions sont vérifiées. La condition pour la synthèse du compensateur avec signal de commande limité est l'un de ces résultats qu'il serait nécessaire de prouver formellement.

L'optimisation de l'énergie de commande totale est réalisée par une recherche itérative du gain de retour d'état donnant une énergie minimale. Une optimisation à base de résolution d'un problème optimal de minimisation d'une fonction de coût serait un apport intéressant à l'algorithme.

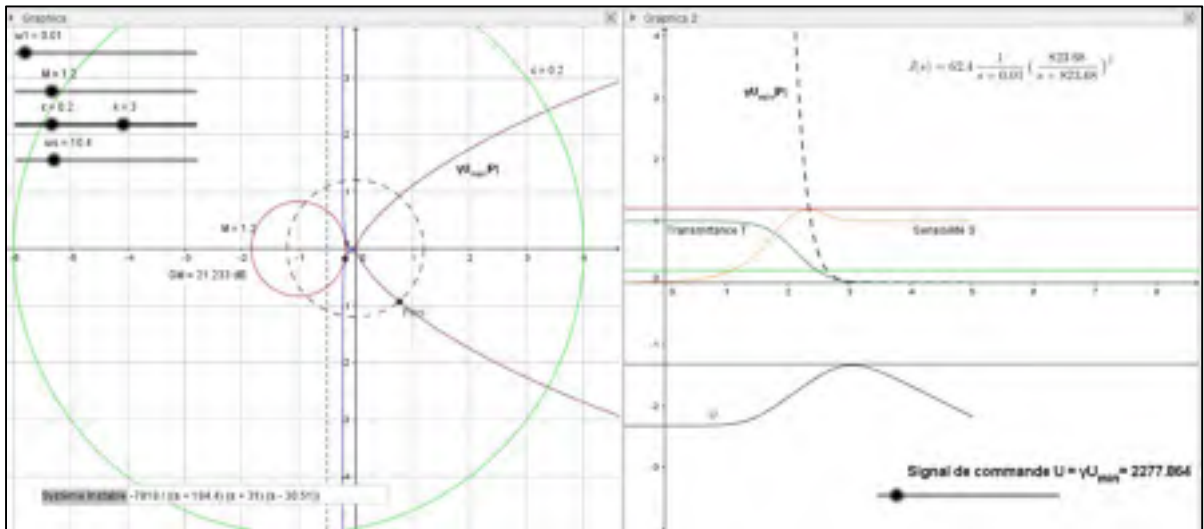
Enfin l'implémentation de l'algorithme peut être améliorée en utilisant des méthodes de calcul optimisée et un codage en langage compilé. Dans ce travail une implémentation sur Matlab a

été utilisée pour réaliser les simulations, le programme est donné en ANNEXE II. Une implémentation visuelle sur un outil de résolution géométrique, GEOGEBRA, est décrite en ANNEXE I. Il serait judicieux d'implémenter l'algorithme sur un DSP et effectuer des tests pratiques sur un banc d'essai pour confirmer les résultats obtenus.

ANNEXE I

IMPLÉMENTATION VISUELLE SUR GÉOGEBRA

On présente dans ce qui suit l'implémentation de la méthode de synthèse du compensateur à double boucle par l'outil de résolution de problèmes géométriques Geogebra. Les conditions et formules sont traduites en des constructions géométriques que l'utilisateur utilisera pour choisir les paramètres du compensateur B. L'utilisateur dispose de glissières (curseurs ou slider bars) pour faire varier les paramètres alors que les courbes des résultats obtenus sont mises à jours en temps réel. La figure ci-dessous montre la configuration générale de l'outil graphique.



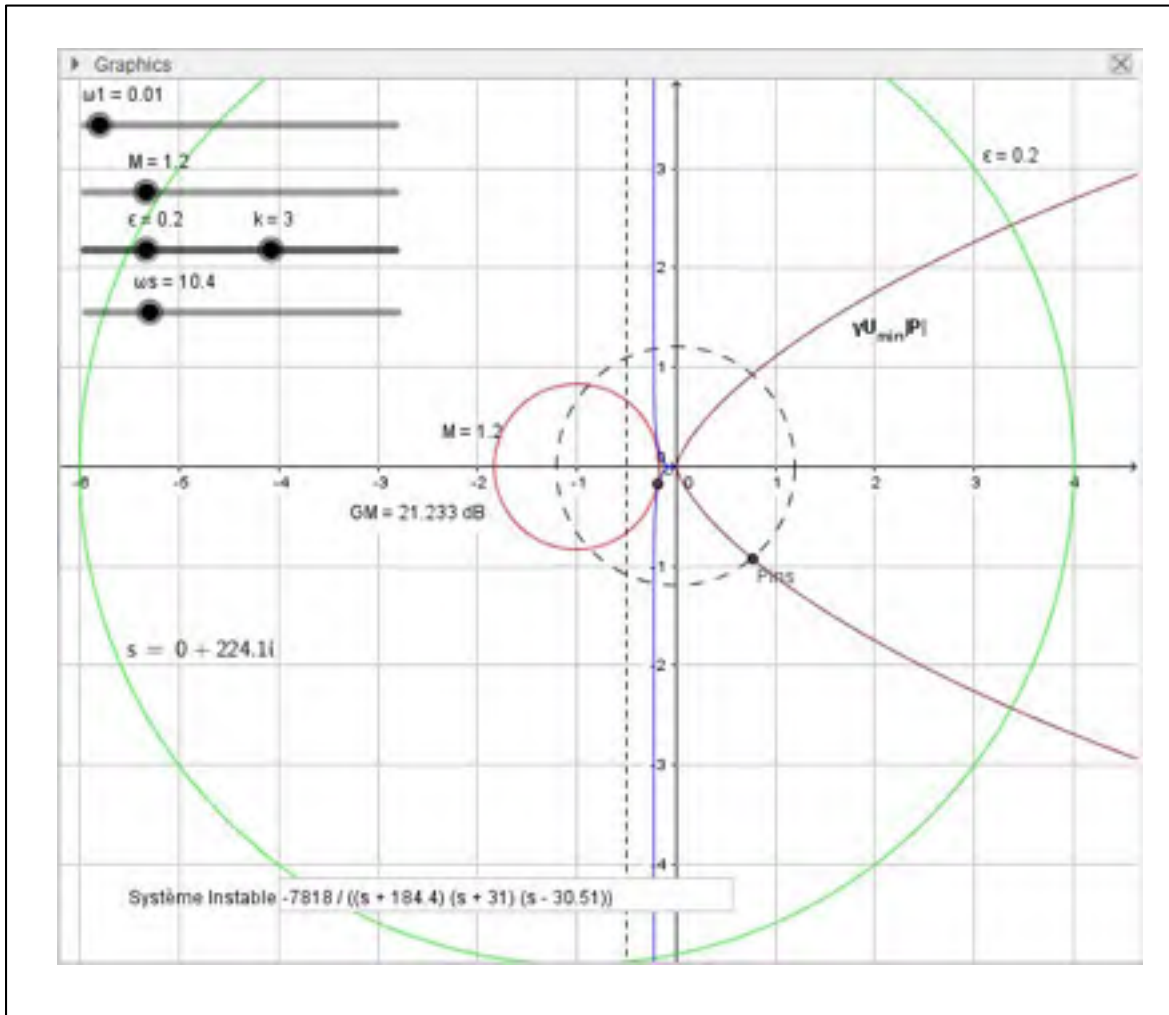
La vue est divisée en deux parties que nous détaillons ci-après.

Du côté gauche nous avons les représentations dans le plan complexe des diagrammes de Nyquist des fonctions de transfert J , courbe en bleu, et $\gamma U_{min}P$ en mauve sur le tracé. On note trois cercles importants :

- Le cercle rouge correspondant à la sensibilité maximale toléré M . Le cercle est centré sur le point critique $(-1,0)$ et dont le rayon est $\frac{1}{M}$. La courbe de J est maintenue tangente à ce cercle pour garantir que la sensibilité en boucle fermée ne dépassera pas la valeur M .
- Le cercle vert qui correspond à la sensibilité à ne pas dépasser sur la plage de minimisation. Il est aussi centré sur le point critique et son rayon est $\frac{1}{\epsilon}$.

- Le cercle en tirets qui est centré sur le point origine (0,0) et dont le rayon est M .

Un champ est prévu pour l'utilisateur où il peut insérer l'expression de la fonction de transfert du système instable P en fonction de s .



Du côté droit on a les courbes des modules de la sensibilité S en boucle fermée, la transmittance T et le signal de commande U . On note la aussi trois droites :

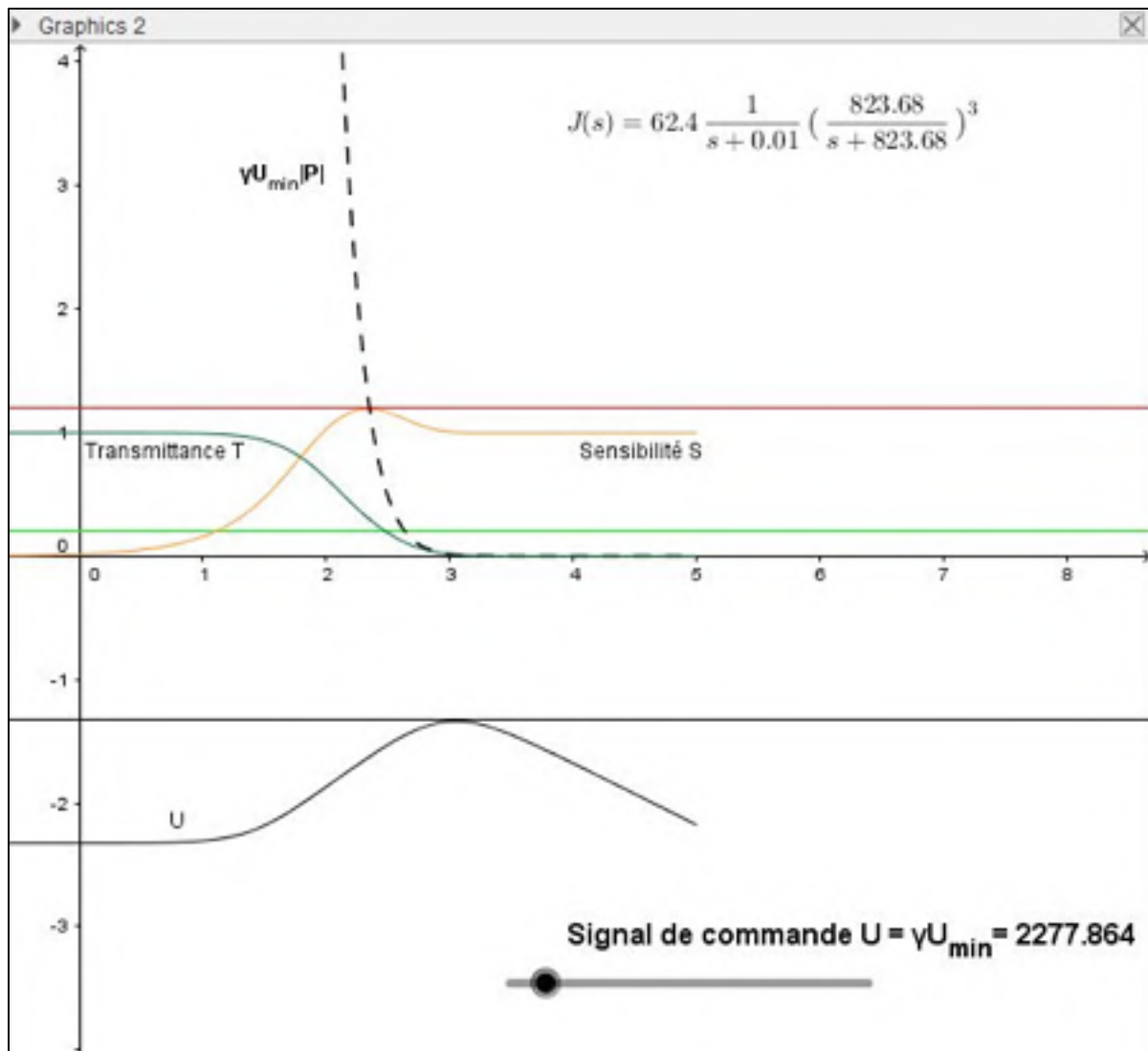
- Une droite rouge qui correspond à la sensibilité maximale tolérée M .
- Une droite verte qui correspond à la sensibilité ε tolérée sur la plage de minimisation.
- Une droite de la valeur du signal de commande maximal qui limite la courbe U .

L'expression de la boucle ouverte désirée J est affichée sur le côté droit.

L'utilisateur dispose de quatre glissières pour faire varier les paramètres, respectivement : $\omega_1, M, \varepsilon, k$ et ω_s . Une autre glissière sur le côté droit permet de fixer la valeur maximale du signal de commande qui est affichée à côté.

Méthode de synthèse du compensateur

- La procédure commence par l'insertion de la fonction de transfert du système instable qu'on désire compenser. La courbe de $\gamma U_{min}P$ est mise à jour ainsi que la courbe du signal de commande.
- L'utilisateur fixe la valeur de la propriété d'atténuation k en utilisant la glissière à cet effet. Cette valeur est liée à la fonction de transfert de P et reste fixe tout le long de la synthèse.
- Les valeurs limite de la sensibilité en boucle fermée désirée sont spécifiées par l'utilisateur à l'aide des glissières. Les cercles et droites associées sont mises à jour. Les paramètres de J sont mis à jour pour respecter les valeurs limités.
- La valeur maximale du signal de commande est fixée par la glissière à droite. La droite correspondante est mise à jour. A ce point, l'utilisateur peut voir si la courbe du signal de commande dépasse la valeur pic tolérée.
- Si la limite de signal de commande est dépassée, l'utilisateur peut varier la valeur de la plage de minimisation pour et observer le changement en temps réel sur la courbe du signal de commande. La valeur garantissant le respect de la valeur limite produit le compensateur recherché.
- L'utilisateur à le choix de modifier un des paramètres M, ε ou ω_s pour respecter ces priorités de conception, en s'assurant que la courbe de U reste en dessous de la droite de la valeur maximale permise.
- L'expression de J qui est synthétisée est affichée en haut à droite.



On peut constater que la conception visuelle est plus flexible que l'implémentation sur Matlab. Elle fait appel à l'utilisateur pour faire la recherche du point optimal à l'aide de limites visuelles. Les conditions de sensibilité sont respectées automatiquement, tandis que la limite de signal de commande est laissée à l'utilisateur qui est aidé par la courbe de U qui est mise à jour en temps réel.

Protocol de construction Geogebra de l'outil graphique

No.	Name	Description
1	Number fac	
2	Number $\omega 1$	
3	Number ε	
4	Number ωs	
5	Number k1	$(\varepsilon + 1) \sqrt{\omega 1^2 + \omega s^2} / \varepsilon$
6	Number M	
7	Number ωb	$\omega 1 \sqrt{k1^2 / (\omega 1^2 (1 - 1 / M)^2) - 1}$
8	Number k	
9	Complex Number s	Point on yAxis
10	Number wbw	
11	Complex Number H	$(1.8wbw)^k / (s + 1.8wbw)^k$
12	Number Hm	$\text{abs}(H)$
13	Number DCins	
14	Number Umin	$1 / \text{DCins}$
15	Number λ	
16	Number γ_1	Hm
17	Number Um	$\lambda \text{ Umin}$
18	Complex Number Pinst	$-7818 / ((s + 184.4) (s + 31.34) (s - 30.51))$
19	Number k_s	k1
20	Number $\omega 2$	fac ωb
21	Complex Number J	$k_s 1 / (s + \omega 1) (\omega 2 / (s + \omega 2))^k$
22	Number T	$\text{abs}(J / (J + 1))$
23	Number W1	
24	Locus loc1	Locus[J, s]
25	Number Js	Distance of J and s
26	CAS Cell \$1	$\text{InverseLaplace}[k1_{\min} 1 / (t + \omega 1) (\omega 2 / (t + \omega 2))^k]$
27	Number S	$\text{abs}(1 / (1 + J))$
28	Line h	

29	Number PM	$k \operatorname{atan}(\omega b / \omega 2) + \operatorname{atan}(\omega b / \omega 1)$
30	Point A	
31	Point B	
32	Point A'	A rotated by angle PM
33	Point F	Point on xAxis
34	Number distanceFSm	$20 \lg(1 / \operatorname{Distance}[F, (0, 0)])$
35	Text TextFSm	"GM = " + distanceFSm + " dB"
36	Point D	
37	Point I	
38	Circle d	Circle with center I and radius $1 / M$
39	Circle e	Circle with center I and radius $1 / \varepsilon$
40	Point G	$(\lg(\operatorname{imaginary}(s)), S)$
41	Locus loc4	$\operatorname{Locus}[G, s]$
42	Line i	$y = M$
43	Line j	$y = \varepsilon$
44	Point C	Point on loc1
45	Complex Number Pins	$U_m \operatorname{Pinst}$
46	Point U	$(\lg(\operatorname{imaginary}(s)), \lg(\operatorname{abs}(\operatorname{Pinst}^{-1} J / (1 + J))) / 2 - 3)$
47	Locus loc2	$\operatorname{Locus}[U, s]$
48	Number Umdb	$20 \lg(U_m)$
49	Point L	$(\gamma_i^2 / (1 - \gamma_i^2), 0)$
50	Locus loc3	$\operatorname{Locus}[\operatorname{Pins}, s]$
51	Number Pinsm	$\operatorname{abs}(\operatorname{Pins})$
52	Complex Number T _c	$J / (1 + J)$
53	Number Jm	$\operatorname{abs}(J)$
54	Number Pm	$\operatorname{abs}(\operatorname{Pinst})$
55	Point O	$(\lg(\operatorname{imaginary}(s)), U_m \operatorname{Pm})$
56	Locus loc8	$\operatorname{Locus}[O, s]$
57	Number Uvalue	$\operatorname{abs}(\operatorname{Pinst}^{-1} J / (1 + J))$
58	Point R	$(\lg(\operatorname{imaginary}(s)), T)$
59	Locus loc5	$\operatorname{Locus}[R, s]$
60	Number xO	Distance of O and xAxis

61	Number xR	Distance of R and xAxis
62	Number ratioOR	xO / xR
63	Number fact	$\gamma_1 \text{ ratioOR} / xR$
64	Complex Number p	Point on yAxis
65	Number n	$2\varepsilon / (\varepsilon (\omega 1 + \sqrt{\omega 1^2 + \omega s^2}) + \sqrt{\omega 1^2 + \omega s^2})$
66	Number a	$\lambda / \omega s$
67	Circle p ₁	Circle with center (0, 0) and radius M
68	Line f	$y = \lg(Um) / 2 - 3$
69	Number b	$\lg(Um)$
70	Text text2	
71	Text text3	
72	Text text4	
73	Text text5	"J(s)=" + (FormulaText[k1]) + "\frac{1}{s}" + (FormulaText[ω1]) + " "}\big(\frac{" + (FormulaText[ω2]) + "}{s}" + (FormulaText[ω2]) + " "}\big)^" + (FormulaText[k]) + ""
74	Text text4 ₁	
75	Text text1	"Signal de commande $U = \gamma U_{\min} = " + (\lambda U_{\min}) + ""$
76	Text text6	"M = " + M + ""
77	Text text7	"ε = " + ε + ""
78	Text text8	
79	Input Box InputBox1	InputBox[Pinst]
80	Point E	
81	Segment g	Segment [E, J]
82	Number distanceEJ	Distance of E and J
83	Text TextEJ	Name[E] + (Name[J]) + " = " + distanceEJ
84	Point N	Point on xAxis
85	Line l	Tangent to d through J
85	Line m	Tangent to d through J
86	Segment q	Segment [I, J]
87	Point P	Intersection point of m, xAxis
88	Angle β	Angle between P, J, I

89	Number distanceIJ	Distance of I and J
90	Text TextIJ	Name[I] + (Name[J]) + " = " + distanceIJ
91	Line r	Line through J perpendicular to xAxis
92	Point Q	Intersection point of r, xAxis
93	Segment c	Segment [Q, J]
94	Point V	Intersection point of m, yAxis
95	Angle γ	Angle between E, P, V
96	Angle δ	Angle between J, I, P
97	Angle ζ	$\gamma + \delta$
98	Point K	(lg(imaginary(s)), abs(Jm))
99	Locus loc6	Locus[K, s]
100	Point W	Point on i
101	Point B _i	Point on xAxis
102	Number o	$Jm \sin(\arg(J)) / (Jm + \cos(\arg(J))) 180 / \pi$
103	Angle α	Angle between Q, E, J
104	Line i _i	
105	Number u	$(M - 1) / M$

ANNEXE II

PROGRAMME MATLAB DE SYNTHÈSE DE LA DOUBLE BOUCLE

Initialisation

```
clear ;  
clc;
```

Acquisitions des paramètres du système

```
disp('Déclarer les parametres du systeme: Variables d''etat (1) ou Fonction de transfert  
(2)?');  
typ = input('');  
if (typ==1)  
    disp('Entrer A');  
    A=input('');  
    disp('Entrer B');  
    B=input('');  
    disp('Entrer C');  
    C=input('');  
    disp('Entrer D');  
    D=input('');  
    sys=ss(A,B,C,D);  
    P=zpk(sys);  
elseif (typ==2)  
    disp('Modele zpk (1) ou num/den (2)?');  
    cas_mod=input('');  
    if(cas_mod==1)  
        disp('Entrer zeros de P');  
        zero_P=input('');  
        disp('Entrer pôles de P');  
        pôle_P=input('');  
        disp('Entrer gain de P');  
        k_P=input('');  
        P=zpk(zero_P,pôle_P,k_P);  
        sys=ss(P,'minimal');  
        A=sys.a;  
        B=sys.b;  
        C=sys.c;  
        D=sys.d;  
    elseif(cas_mod==2)  
        disp('Entrer numérateur de P');  
        num_P=input('');  
        disp('Entrer dénominateur de P');  
        den_P=input('');  
        P=tf(num_P,den_P);  
        sys=ss(P,'minimal');
```

```

        A=sys.a;
        B=sys.b;
        C=sys.c;
        D=sys.d;
    end
end
% Affichage de Umin=1/P(0)
[mag,wout]=bode(P,[0]);
Umin=1/mag;
fprintf('Le signal de commande minimum est Umin=%4.2f\n',Umin);
% n
n=3;
% nu
nu=100;

```

Acquisition des conditions de sensibilité

```

disp('entrer la valeur maximal de sensibilité M');
M = input('');
% epsilon
disp('entrer la valeur minimal de sensibilité epsilon');
EPS = input('');
% Omega2
disp('entrer la fréquence w2 maximale du compensateur');
w2max = input('');
% Temps de stabilisation
disp('entrer le temps de stabilisation maximum toléré');
ts_max = input('');
% Depassement
disp('entrer le dépassement temporel maximum toléré en pourcent');
Os_max = input('');
% Signal de commande maximum
disp('entrer gamma > 1 tel que Umax=gamma*Umin');
gamma = input('');
if (norm(P,inf)*Umin*gamma < M)
    fprintf('Aucune solution possible avec M=%4.2f. Je vais essayer avec
M=%4.2f\n',M,norm(P,inf)*Umin*gamma);
    M=norm(P,inf)*Umin*gamma;
    UMAX=gamma*Umin;
else
    UMAX=gamma*Umin;
end
fprintf('Le signal de commande maximum toléré est %4.2f\n',UMAX);

```

Synthèse du compensateur

```

ts=1;
Umax=UMAX+1;
ts_umin=2.09;
w1=0.01;

```

```

% Determination des parametres de J
k=n;
trouve=0;
fprintf('\n\n-- Recherche de la solution pour Umax=%4.2f --',UMAX);
Smax=M+1;
wrange=logspace(0,3,100000);
gammaP=UMAX*P;
[mag,phase,wout]=bode(gammaP,wrange);
thr = 1e-2;
ind = find(mag>M-thr & mag<M+thr);
wc=wout((ind(round(size(ind,1)/2)))));
wbw=bandwidth(P);
ws_min=abs(fun(M,EPS,w1,wc,k,10));
fprintf('\n Compensateur conservateur trouvé pour ws=%4.2f',ws_min);
fprintf('\n Recherche d'un meilleur compensateur');
for ws=ws_min:.1:100*ws_min
    k1=(EPS + 1)* sqrt(w1^2 + ws^2) /EPS;
    WB=w1*sqrt((k1^2/(w1^2*(1-1/M)^2)-1));
    w2=2.2*WB;
    % Construction de J
    %J
    J1=zpk([],[-w1],1);
    J2=zpk([],[-w2],w2);
    J=k1*J1*J2^k;
    % Boucle fermee, reponse temporelle et frequentielle
    % Transmittance et sensibilite
    Tj=feedback(J,1);
    Sj=1/(1+J);
    Smax=norm(Sj,inf);
    % Signal de commande U
    Uj=P^(-1)*Tj;
    Umax=norm(Uj,inf);
    stab=allmargin(J);
    if (stab.Stable==1)
        St=stepinfo(Tj);
        ts=St.SettlingTime;
    else
        ts=1;
    end
    if (Umax>UMAX)
        fprintf('\n -> Solution trouvee:');
        if (Smaxf>M)
            fprintf('\n Attention depassement de la sensibilite max Smax=%4.4f',Smaxf);
        end
        if (ts>ts_max)
            fprintf('\n Attention depassement du temps de stabilisation max ts=%4.2f',ts);
        end
        fprintf('\n Sensibilité maximale: %4.2f',Smaxf);
        fprintf('\n signal de commande maximum: %4.2f',Umaxf);
        fprintf('\n Temps de stabilisation: %4.4f',tsf);
        fprintf('\n Plage de désensibilisation pour EPS=%4.2f : %4.2f',EPS,wsf);
        fprintf('\n Paramètres du compensateur B');
    end
end

```

```

        fprintf('\n w1 : %4.2f w2: %4.2f k1: %4.2f k:%4.2f',w1f,w2f,k1f,kf);
        break
    end
    Jf=J;
    EPSf=EPS;
    Wsf=WS;
    tsf=ts;
    Umaxf=Umax;
    Smaxf=Smax;
    w2f=w2;
    k1f=k1;
    w1f=w1;
    kf=k;
    fprintf('.');
end

```

Optimisation de l'énergie

```

fprintf('\n\n -- Optimisation de l''énergie de commande --');
Ener_totf=1e5;
fprintf('\n Recherche du compensateur optimisé');
% Gain constant de l'observateur
obs=[-20 -20 -20];
Ke=acker(A',C',obs)';
Ketot=norm(Ke,2);
% Calcul du gain de retour d'état
ii=0;
for ps=-10:-10:-1000
    ii=ii+1;
    pol=[ps -184.4 -31.51];
    K=place(A,B,pol);
    Ktot=norm(K,2);
    % Calcul de Kr
    Kr=rscale(A,B,C,0,K);
    Krtot=norm(Kr,2);
    % Système stable avec retour d'état
    sys_s=ss([A-B*K B*K;zeros(3) A-Ke*C],[B*Kr;zeros(3,1)],[C zeros(1,3)],[]);
    P_s=zpk(sys_s);
    Pstot=norm(P_s,2);
    % Calcul de F1
    F_1=ss(A-B*K-Ke*C,Ke,K,0);
    % Calcul de F2
    F_2=ss(A-B*K-Ke*C,B*Kr,-K,Kr);
    %C_B
    C_B=P_s^-1*Jf;
    Cmax=norm(C_B, inf);
    Ctot=norm(C_B);
    % Boucle ouverte
    L=minreal(series(C_B,P_s));
    % Boucle fermée et sensibilité
    T=feedback(L,1);

```



```

S=1/(1+L);
% Signal de commande
U=P^-1*T;
%Energie totale de commande
Ener_tot=Ctot+Ktot+Ketot+Krtot;
Ener_ps(ii)=abs(ps);
Ener(ii)=Ener_tot;
if (Ener_tot<Ener_totf)
    Ener_totf=Ener_tot;
    psf=ps;
    C_Bf=C_B;
    Lf=L;
    Tf=T;
    Sf=S;
    Uf=U;
    Kf=K;
    Kef=Ke;
    Krf=Kr;
    Cmaxf=Cmax;
    Ctotf=Ctot;
    Ktotf=norm(K,2);
    Ketotf=norm(Ke,2);
    Pstotf=norm(P_s,2);
end
fprintf(' ');
end
fprintf('\n Compensateur avec energie de commande optimale pour Umax=%4.2f',UMAX);
fprintf('\n Pôle stabilisé à ps=%4.2f',psf);
fprintf('\n Gain de l'observateur d'état Ke:');
Kef'
fprintf('Gain du retour d'état K:');
Kf
fprintf('Gain statique Kr:');
Krf
fprintf(' Norme max du compensateur B: %4.2f dB',20*log10(Cmaxf));
fprintf('\n Norme 2 du compensateur B: %4.2f',Ctotf);
fprintf('\n Norme 2 du gain K: %4.2f',Ktotf);
fprintf('\n Norme 2 du gain Ke: %4.2f',Ketotf);
fprintf('\n Energie totale de commande: %4.2f',Ener_totf);
fprintf('\n Compensateur B trouvé:\n');
C_Bf

```

Application du préfiltre

```

bwtf=bandwidth(Tf);
Stf=stepinfo(Tf);
tsf=Stf.SettlingTime;
filtre_trouve=0;
fprintf('\n Recherche d'un préfiltre pour améliorer les performances temporelles');
for pas1=bwtf/10:bwtf/10:bwtf-bwtf/10
    for pas2=bwtf/10:bwtf/10:bwtf

```

```

F=zpk([- (bwtf-pas1)], [- (bwtf+pas2)], (bwtf+pas2)/(bwtf-pas1));
Tff=Tf*F;
Stff=stepinfo(Tff);
tsff=Stff.SettlingTime;
Osff=Stff.Overshoot;
Usff=Stff.Undershoot;
fprintf('\n pas1= %6.4f, pas2=%6.4f, tsff=%6.4f, Osff=%6.4f,
Usff=%6.4f',pas1,pas2,tsff,Osff,Usff);
if (tsff<tsf) && (Osff<Os_max) && (Usff==0)
    filtre_trouve=1;
    tsf=tsff;
    T_ideal=Tff;
    Ff=F;
    pas1f=pas1;
    pas2f=pas2;
    Os=Osff;
    Us=Usff;
end
fprintf(' ');
end
end
if (filtre_trouve==1)
    fprintf('\n Filtre trouvé: ');
    Ff
    pas1f
    pas2f
    fprintf('\n Temps de stabilisation avec préfiltre:%4.4f\n',tsf);
    figure(1)
    step(Tf,T_ideal);
    grid on
    title('Réponse indicielle du système en boucle fermée avec et sans préfiltre')
else
    figure(1)
    step(Tf);
    grid on
    title('Réponse indicielle du système en boucle fermée avec et sans préfiltre')
end

figure(2)
bh1=bodeplot(Sf);
setoptions(bh1,'MagUnits','abs','MagScale','log');
grid on
title('Diagramme de Bode de la sensibilité S en boucle fermée')
figure(3)
bh2=bodeplot(Uf);
setoptions(bh2,'MagUnits','abs','MagScale','log');
grid on
title('Diagramme de Bode du signal de commande U')
figure(4)
step(Uf);
grid on
title('Courbe temporelle du signal de commande U')

```

```
figure(5)
bh3=bodeplot(C_Bf);
setoptions(bh3,'MagUnits','abs','MagScale','log');
grid on
title('Diagramme de Bode du compensateur B')
figure(6)
plot(Ener_ps,Ener);
title('Energie totale de commande pour différentes valeurs du pôle stabilisé');
grid on
```


ANNEXE III

PROGRAMME MATLAB POUR LES FONCTIONS DE PONDERATION

Déclaration du processus P

```
A=[0,1,0;952.1384,0,-43.2409;0,3.4344,-185.203];  
B=[0;0;180.8109];  
C=[1,0,0];  
D = 0;  
P=ss(A,B,C,[]);
```

Initialisation des paramètres A, M et L

```
AA=0.05;  
M=2;  
LL=0.01;  
wb=10;  
trA=0;  
trM=0;  
trL=0;
```

Déclaration de W2

```
ww2=1e-4;
```

Recherche des paramètres des fonctions de pondération

```
fprintf('\nRecherche des paramètres');  
for i=1:1:40  
    fprintf('.');  
    if(trA==0)  
        AA=AA/2;  
    end  
    if(trM==0)  
        M=M*2;  
    end  
    if(trL==0)  
        LL=LL/2;  
    end  
    s=zpk('s');  
    ww1 = (1/M*s+wb)/(s+wb*AA);  
    ww3=(LL*s+1)/(2*(0.5*LL*s+1));  
    [K,CL,GAM] = mixsyn(P,ww1,ww2,ww3);  
    L=K*P;  
    Tinf=feedback(L,1);  
    Sinf=1/(1+L);
```

```

Uinf=K*Sinf;
wrange=logspace(0,3,100000);
[magS,phaseS,woutS]=bode(Sinf,wrange);
[magT,phaseT,woutT]=bode(Tinf,wrange);
[magww1,phaseww1,woutww1]=bode(1/ww1,wrange);
[magww3,phaseww3,woutww3]=bode(1/ww3,wrange);
thr = 1e-3;
indw = find(woutT>wb-thr & woutT<wb+thr);
wbw=indw(1);
diffA=magww1(1:wbw)-magS(1:wbw);
if (diffA>0)
    trA=1;
    Af=AA;
end
diffM=magww1(wbw:end)-magS(wbw:end);
if (diffM>0)
    trM=1;
    Mf=M;
end
diffL=magww3(wbw:end)-magT(wbw:end);
if (diffL>0)
    trL=1;
    Lf=LL;
end
end
end

```

Formation des fonctions W1 et W3

```

fprintf('\n');
ww1 = (1/Mf*s+wb)/(s+wb*Af);
ww3=(Lf*s+1)/(2*(0.5*Lf*s+1));

```

Synthèse du compensateur Hinf

```

[Kf,CL,GAM] = mixsyn(P,ww1,ww2,ww3);

```

Construction de la boucle fermée

```

L_final=minreal(Kf*P,1e-6);
T_final=minreal(feedback(L_final,1),1e-6);
S_final=minreal(1/(1+L_final),1e-6);
U_final=minreal(Kf*S_final,1e-6);

```

Affichage des résultats

```
figure(11)
step(T_final);
figure(12)
bode(T_final)
figure(21)
bode(S_final);
figure(31)
bode(U_final);
figure(32)
step(U_final);
```


LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Abdel-Rahim, N. M., et J. E. Quaicoe. 1996. « Analysis and design of a multiple feedback loop control strategy for single-phase voltage-source UPS inverters ». *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 11, n° 4, p. 532-541.
- Belanger, Pierre R. 1995. *Control Engineering: A Modern Approach*. Oxford University Press, Inc., 494 p.
- Bensoussan, D. 1984a. « Sensitivity reduction in single-input single-output systems ». *International Journal of Control*, vol. 39, n° 2, p. 321-335.
- Bensoussan, D. 2008. *Commande moderne : approche par modèles continus et discrets* (2008). Montréal: Presses internationales Polytechnique, xiv, 381 p. p.
- Socovar, S.E.C. 2014. *System and method for feedback control*.
- Bensoussan, D. 2015. « Robust and ultrafast response compensator for unstable invertible plants ». *Automatica*, vol. 60, p. 43-47.
- Bensoussan, David. 1984b. « Decentralized control and sensitivity reduction of weakly coupled plants ». *International Journal of Control*, vol. 40, n° 6, p. 1099-1118.
- Boyd, Stephen P, et Craig H Barratt. 1991. *Linear controller design: limits of performance*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.
- Desborough, Lane, et Thomas Harris. 1993. « Performance assessment measures for univariate feedback control ». *Canadian Journal of Chemical Engineering*, vol. 70, p. 1186-1186.
- Donha, D. C., et M. R. Katebi. 2007. « Automatic weight selection for controller synthesis ». *International Journal of Systems Science*, vol. 38, n° 8, p. 651-664.
- Francis, B., et G. Zames. 1982. « On optimal sensitivity theory for SISO feedback systems ». In *1982 21st IEEE Conference on Decision and Control*. (8-10 Dec. 1982), p. 623-628.
- Freudenberg, J. S., et D. P. Looze. 1983. « Sensitivity reduction, nonminimum phase zeros, and design tradeoffs in single loop feedback systems ». In *Decision and Control, 1983. The 22nd IEEE Conference on*. (- Dec. 1983), p. 625-630.
- Garcia, Daniel. 2006. « Auto-ajustement de régulateurs PID robustes dans le domaine fréquentiel ». PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.

- Han, Hyung-Suk, et Dong-Sung Kim. 2016. « Introduction ». In *Magnetic Levitation: Maglev Technology and Applications*. Han2016. p. 1-8. Dordrecht: Springer Netherlands. < http://dx.doi.org/10.1007/978-94-017-7524-3_1 >.
- Kelemen, Matei, et David Bensoussan. 2004. « On the design, robustness, implementation and use of quasi-linear feedback compensators ». *International Journal of Control*, vol. 77, n° 6, p. 527-545.
- Levine, W. S. 1996. *The Control handbook* (1996). Boca Raton, Fla. : New York: CRC Press, Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1548 p. p.
- Li, H. Z., Z. Gong, W. Lin et T. Lippa. 2006. « A New Motion Control Approach for Jerk and Transient Vibration Suppression ». In *Industrial Informatics, 2006 IEEE International Conference on*. (16-18 Aug. 2006), p. 676-681.
- Li, S., T. A. Haskew, K. A. Williams et R. P. Swatloski. 2012. « Control of DFIG Wind Turbine With Direct-Current Vector Control Configuration ». *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, vol. 3, n° 1, p. 1-11.
- Li, Shuhui, Timothy A. Haskew et Ling Xu. 2010. « Conventional and novel control designs for direct driven PMSG wind turbines ». *Electric Power Systems Research*, vol. 80, n° 3, p. 328-338.
- Middleton, R. H. 1991. « Trade-offs in linear control system design ». *Automatica*, vol. 27, n° 2, p. 281-292.
- Middleton, R. H., et J. H. Braslavsky. 2000. « On the relationship between logarithmic sensitivity integrals and limiting optimal control problems ». In *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*. (2000) Vol. 5, p. 4990-4995 vol.5.
- Ogata, Katsuhiko. 2010. *Modern control engineering (5th ed.)*. Prentice-Hall, Inc., 894 p.
- Sangster, A. J. 2012. *Fundamentals of Electromagnetic Levitation - Engineering Sustainability through Efficiency*. Institution of Engineering and Technology.
- Shih-Liang, Jung, Huang Hsiang-Sung, Chang Meng-Yueh et Tzou Ying-Yu. 1997. « DSP-based multiple-loop control strategy for single-phase inverters used in AC power sources ». In *Power Electronics Specialists Conference, 1997. PESC '97 Record., 28th Annual IEEE*. (22-27 Jun 1997) Vol. 1, p. 706-712 vol.1.
- Stewart, G.W. 1973. *Introduction to matrix computations*. Academic Press.
- Sun, Y., D. Bensoussan, M. Hammami, T. Wang et A. Houimdi. 2015. « Robust and ultrafast response compensator applied to a levitation system ». In *Control Conference (ECC), 2015 European*. (15-17 July 2015), p. 818-823.

- Tao, Gang. 2003. *Adaptive control design and analysis*, 37. John Wiley & Sons.
- Tay, Teng-Tiow, Iven Mareels et John B Moore. 2012. *High performance control*. Springer Science & Business Media.
- Toscano, Rosario. 2013. *Structured Controllers for Uncertain Systems*. Coll. « A Stochastic Optimization Approach ». London: Springer-Verlag London, 298 p.
- Venkatesh, K. V., Sharad Bhartiya et Anurag Ruhela. 2004. « Multiple feedback loops are key to a robust dynamic performance of tryptophan regulation in *Escherichia coli* ». *FEBS Letters*, vol. 563, n° 1-3, p. 234-240.
- Yao, W., M. Chen, J. Chen et Z. Qian. 2007. « An Improved Multiple-loop Controller for Parallel Operation of Single-phase Inverters with No Control Interconnections ». In *2007 IEEE Power Electronics Specialists Conference*. (17-21 June 2007), p. 448-452.
- Zames, G. 1981. « Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, n° 2, p. 301-320.
- Zhou, Kemin, John C. Doyle et Keith Glover. 1996. *Robust and optimal control*. Prentice-Hall, Inc., 596 p.